



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)**

О.В. Гробер, М.Н. Богачева, Т.А. Гробер

Высшая математика

Часть 2

Ростов-на-Дону
2025

ГЛАВА 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

1.1. Функция как отображение

Пусть E - заданное множество точек числовой оси R .

Определение 1. Закон, который каждой точке $x \in E$ ставит в соответствие единственное вполне определенное число y , называется *функцией*, определенной на множестве E или отображением множества E в R .

Обозначать функцию будем чаще всего буквой f , а также другими прописными или заглавными буквами латинского или греческого алфавитов. Запись $y = f(x)$ говорит о том, что значению аргумента x функция f ставит в соответствие число y . Множество E называется областью определения функции f . Функция f отображает каждое $x \in E$ в некоторое число $y = f(x)$, называемое образом точки x . Например, функция $y = x^2$ представляет собой операцию возведения аргумента x в квадрат. Так, числу $x_1 = 3$ она ставит в соответствие число $y_1 = 3^2 = 9$, числу $x_2 = 5$ — $y_2 = 5^2 = 25$ и т. д. Функция $y = \sin x$ каждому действительному числу x ставит соответствие его синус. Например, $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Определение 2. Если множество E заранее не задано, а функция f определена аналитической формулой $y = f(x)$, то *областью ее определения* называют множество всех значений $x \in R$, для которых $f(x)$ может быть вычислено.

Примеры:

1) $y = 5x^4 - 3x^2 + 2x + 7$ — многочлен; его значения могут быть вычислены при всех $x \in R$;

2) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) тоже имеют областью определения всю числовую ось R ;

3) $y = \frac{4x^5 - 2x^3 + 3}{x^2 - 12x + 35}$ — рациональная функция определена на всей числовой оси, за исключением тех точек, где знаменатель равен нулю, т.е. за исключением точек $x_1 = 5$ и $x_2 = 7$;

4) $y = \sqrt{x}$ — иррациональная функция. Она определена на множестве $[0; +\infty)$;

5) $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) – логарифмическая функция определена на множестве $(0; +\infty)$.

Определение 3. Графиком функции f называется множество точек пространства R^2 с координатами $(x, f(x))$, $x \in E$.

1.2. Понятие сложной функции

Пусть $u = \varphi(x)$ – функция, определенная на множестве $E \subset R$ со значениями на множестве $F \subset R$, а $y = f(u)$ – функция, определенная на F . В таком случае каждому $x \in E$ можно поставить в соответствие вещественное число y по закону $y = f(\varphi(x))$. Тем самым, на множестве E определена функция, которую мы будем обозначать $f \circ \varphi$ и называть *сложной функцией* или *композицией функций* f и φ . При этом, функцию φ будем называть внутренней, а функцию f – внешней.

Например, $y = \ln(1 + x^2)$ – сложная функция, $u = 1 + x^2$ – внутренняя функция, а $y = \ln u$ – внешняя.

1.3. Обратные функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $E \subset R$, а её значения заполняют множество F . Если каждому $y \in F$ можно поставить в соответствие единственное значение $x \in E$ так, что $f(x) = y$, то говорят, что на множестве F определена функция $x = f^{-1}(y)$, которая называется *обратной* для $y = f(x)$.

Ясно, что если $x = f^{-1}(y)$ – функция обратная для $y = f(x)$, то сама функция $y = f(x)$ является обратной для $x = f^{-1}(y)$. Поэтому функции $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ называются *взаимно обратными*.

При этом выполняются равенства:

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{и} \quad f^{-1}(f(x)) = x.$$

Примерами взаимно обратных могут служить следующие пары функций:

- 1) $y = x^2$ на отрезке $[2; 3]$ и $x = \sqrt{y}$ на $[4; 9]$;
- 2) $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$ на всей числовой оси и $x = \log_a y$, $a > 0, a \neq 1$ на $(0; +\infty)$;
- 3) $y = \sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $x = \arcsin y$ на $[-1; 1]$;
- 4) $y = \cos x$ на $[0; \pi]$ и $x = \arccos y$ на $[-1; 1]$;

- 5) $y = \operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $x = \operatorname{arctg} y$ на $(-\infty; +\infty)$;
 6) $y = \operatorname{ctg} x$ на $(0; \pi)$ и $x = \operatorname{arcctg} y$ на $(-\infty; +\infty)$.

1.4. Элементарные функции

Следующие функции относят обычно к числу *основных элементарных*:

- 1) степенная $y = x^\alpha$, $\alpha \in R$;
- 2) показательная $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- 3) логарифмическая $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- 4) тригонометрические $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;
- 5) обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,
 $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Определение 4. *Элементарными функциями* называются все функции, которые можно составить из основных элементарных с помощью конечного числа алгебраических операций и композиций.

Например, элементарными являются функции $y = \ln(\sin 7x)$,
 $y = 4\operatorname{arctg}^5 x + \cos(x^3 + 1) + 10$.

§2. ПОНЯТИЕ ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определение 5. *Окрестностью* (δ -окрестностью) точки $a \in R$ называется симметричный относительно точки a интервал $(a - \delta; a + \delta)$.

Точку a будем называть *предельной точкой* множества E , если в любой (даже очень малой) окрестности точки a есть точки множества E , т.е. точками множества E можно «добраться» до точки a .

Пусть a - предельная точка множества E .

Определение 6. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ когда x стремится к a , если величина $|f(x) - A|$ может быть сделана меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ за счет того, что x очень близко подойдет к точке a .

Строго это определение выглядит так:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x \in (a - \delta; a + \delta).$$

Определение 7. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ когда x стремится к $+\infty$, если величина $|f(x) - A|$ может быть сделана меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ за счет того, что x станет очень большим положительным числом:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \stackrel{\text{опред}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad : \quad |f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x > M.$$

Аналогично дается определение предела на $-\infty$.

Основные теоремы о пределах

Теорема 1.

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c \quad (\text{предел постоянной равен самой постоянной}).$$

Теорема 2. Если существуют $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, то

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (g(x) + f(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} g(x) + \lim_{x \rightarrow a} f(x), \\ \lim_{x \rightarrow a} (g(x) \cdot f(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x), \\ \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \quad (\text{при дополнительном условии } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0). \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть в некоторой окрестности точки a $f(x) \geq 0$. Тогда из условия $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ следует, что $A \geq 0$.

Теорема 4. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ и в некоторой окрестности точки a выполняются неравенства

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x),$$

то $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$.

Все сформулированные теоремы справедливы также и когда $x \rightarrow \infty$.

§3. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

Определение 8. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией* (б.м.ф.) при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$.

Аналогично, $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \rightarrow \infty$, если $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$.

Например, при $x \rightarrow 0$ бесконечно малыми являются функции: $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $e^x - 1$, $\ln(1+x)$, а при $x \rightarrow 3$ – функции $(x-3)^2$, $5^{x-3} - 1$, $\sin(2x-6)$, $\ln(4-x)$, $\operatorname{arctg} \frac{x-3}{8}$ и т.п.

Из теоремы 2 вытекают важные следствия:

- 1) сумма двух б.м.ф. является б.м.ф.
- 2) произведение б.м.ф. на функцию ограниченную есть б.м.ф.

Напомним, что функция $g(x)$ называется *ограниченной на множестве E* , если её значения на этом множестве не превосходят некоторого числа.

Если функция имеет конечный предел $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, то в окрестности точки a она ограничена.

Определение 9. Функция $\Phi(x)$ называется *бесконечно большой функцией* (б.б.ф.) при $x \rightarrow a$ (или при $x \rightarrow \infty$), если при приближении x к a её значения по абсолютной величине неограниченно растут, становятся больше любого наперед заданного числа. Тот факт, что $\Phi(x)$ – б.б.ф. обозначается записью $\lim_{x \rightarrow a} \Phi(x) = \infty$.

Точное определение б.б.ф. таково: $\lim_{x \rightarrow a} \Phi(x) = \infty$, если для любого сколько угодно большого положительного числа M найдется окрестность точки a ($a - \delta, a + \delta$), такая, что

$$|\Phi(x)| > M \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta).$$

Сумма двух бесконечно больших функций одного знака есть б.б.ф. того же знака.

Существует тесная связь между б.м. и б.б. функциями:

- если $\alpha(x)$ – б.м.ф. при a , то $\Phi(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ – б.б.ф. при $x \rightarrow a$,

- если $\Phi(x)$ – б.б.ф. при $x \rightarrow a$, то $\alpha(x) = \frac{1}{\Phi(x)}$ – б.м.ф. при $x \rightarrow a$.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции можно сравнивать.

Функция $\alpha(x)$ называется *б.м.ф. более высокого порядка*, чем $\beta(x)$ при $x \rightarrow a$ (обозначается $\alpha(x) \ll \beta(x)$), если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Например, при $x \rightarrow 4$ $\alpha(x) = (x-4)^2$ б.м.ф. более высокого порядка, чем $\beta(x) = x-4$, т.к.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)^2}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{1} = 0.$$

Функция $\Phi(x)$ называется *б.б.ф. более высокого порядка*, чем $F(x)$ при $x \rightarrow a$ ($\Phi(x) \gg F(x)$), если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\Phi(x)}{F(x)} = \infty.$$

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Обозначается этот факт таким образом: $\alpha(x) \sim \beta(x)$. Это понятие относится и к б.м. и к б.б. функциям.

Важность понятий эквивалентности устанавливается следующей теоремой.

Теорема 5. *Предел отношения функций равен пределу отношения функций, им эквивалентных.*

Основываясь на этой теореме, при решении задач на вычисление пределов эффективно используется такой принцип:

|| каждый б.б. или б.м. множитель числителя или знаменателя можно заменить эквивалентным.

Таблица эквивалентных функций:

- При $x \rightarrow 0$ имеют место следующие эквивалентности:

$$\begin{array}{ll} \sin x \sim x & \operatorname{arctg} x \sim x \\ \operatorname{tg} x \sim x & \ln(1+x) \sim x \\ \arcsin x \sim x & e^x - 1 \sim x \end{array}$$

- При $x \rightarrow \infty$ каждый многочлен эквивалентен своему старшему члену:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \sim a_n x^n$$

Так, например, $4x^5 + 13x^4 - 6x^3 + 2x + 7 \sim 4x^5$ при $x \rightarrow \infty$.

Приведем примеры.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{5x} = \frac{1}{5};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{arctg} 4x}{x^3 + 8x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 4x}{x^2(x+8)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x+8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x^2} - 1}{\operatorname{tg} 7x \cdot \ln(1 + 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{7x \cdot 2x} = \frac{5}{14};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin 4x}{e^{7x^2} - e^{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 4x}{e^{2x^2} (e^{5x^2} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{e^{2x^2} \cdot 5x^2} = \frac{4}{5}; \text{ (здесь мы воспользовались}$$

так же тем, что $e^0 = 1$);

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 2x^3 + 3x + 5}{16x^4 - 5x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4}{16x^4} = \frac{7}{16};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x^2 + 2)(3x^4 - x^3 + 2)}{(2x + 7)^3(4x^3 + 9x^2 + 6)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 \cdot 3x^4}{(2x)^3 \cdot 4x^3} = \frac{15}{32}.$$

При решении следующих примеров учитывается связь между б.б. и б.м. функциями.

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 3x}{\operatorname{tg}^2 x \cdot \ln(1 + 10x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 3x}{x^2 \cdot 10x} = \frac{3}{10} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty;$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 2x + 7}{9x^5 + 3x^4 + 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4}{9x^5} = \frac{5}{9} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0;$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot 5x}{\sin x \cdot 2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (x + 5)}{x \cdot 2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 5) \cdot \frac{1}{2^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

В последнем примере мы воспользовались тем, что при $x \rightarrow 0$ функция $\frac{1}{x}$ является б.б.ф. Отсюда следует, что $2^{\frac{1}{x}}$ – б.б.ф. при $x \rightarrow 0$, но тогда функция $\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}$ является б.м. И её произведение на ограниченную (в окрестности 0) функцию $(x + 5)$ тоже определяет собой б.м., вот почему предел равен нулю.

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\ln(1 + 7x)};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\operatorname{arctg} 5x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^6 - 3x^3 + 2}{7x^6 + 4x + 3};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - 2)(x^3 + 8)}{(x^2 + 5)(2x^2 + 7)};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 4x - 1}{5x^6 - 2x + 7};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^4 + 1)(x^2 + 3)}{5x^5 + 7x^2 + 8};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)^2}{\operatorname{tg}(x - 2) \cdot \arcsin(x - 2)};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x^2} - 1}{(\sin 2x)^2};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \right);$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \cdot \sin \frac{1}{5x^2} \right);$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{x}{2} \cdot \arcsin 6x}{\ln(1-x^2)};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x^2 + \pi \cdot x};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 5x)}{\ln(\cos 4x)};$$

$$19) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 2x}{x^2 \cdot \ln(1+4x)};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{\operatorname{tg}(x-a)}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\pi-3x};$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln\left(\cos \frac{\pi}{x}\right);$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 4x\right)}{x};$$

§4. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Определение 10. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке a* , если она определена в некоторой окрестности точки a и

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Определение 11. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на множестве E* , если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Известно, что все основные элементарные функции непрерывны, каждая в своей области определения. На самом деле, непрерывностью элементарных функций мы уже пользовались неоднократно при вычислении пределов.

Например, утверждая, что $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$, мы используем непрерывность функции $y = x^2$ в точке $a = 3$, а заявление о том, что $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x = \frac{1}{2}$ означает непрерывность функции $y = \sin x$ в точке $\frac{\pi}{6}$.

Теорема 6. Сумма непрерывных в точке a функций является непрерывной функцией.

Теорема 7. Произведение непрерывных в точке a функций является непрерывной функцией.

Теорема 8. Частное от деления двух непрерывных в точке a функций представляет собой непрерывную функцию, если делитель в точке a отличен от нуля.

Теорема 9. *Композиция непрерывных функций есть непрерывная функция.*

Из теорем 6-9 следует, что все элементарные функции непрерывны в своих областях определения.

Приведем еще ряд важных свойств непрерывных функций.

Теорема 10 (о сохранении знака). *Если функция f непрерывна в точке a и положительна в этой точке, то она положительна и в некоторой окрестности точки a .*

Теорема 11 (о наибольшем и наименьшем значениях). *Если функция f непрерывна на замкнутом отрезке $[a; b]$, то хотя бы в одной точке отрезка $[a; b]$ функция принимает наибольшее значение и хотя бы в одной – наименьшее.*

Теорема 12 (о промежуточном значении). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на его концах принимает значения различных знаков. Тогда внутри отрезка $[a; b]$ найдется точка, в которой функция f обращается в нуль.*

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называют *точками разрыва*.

При дальнейшей работе с элементарными функциями, полезно иметь в виду следующее:

1) многочлен, $\sin x$, $\cos x$, a^x ($a > 0, a \neq 1$) непрерывны на всей числовой оси;

2) рациональная функция – отношение двух многочленов $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$

непрерывна на всей числовой оси, кроме точек, где $Q_n(x) = 0$; эти точки являются точками разрыва функции $f(x)$;

3) $\operatorname{tg} x$ непрерывен на всей оси, кроме точек $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, а $\operatorname{ctg} x$ – на всей оси, кроме точек $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

4) Логарифмическая функция $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) непрерывна при всех $x > 0$.

§5. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

5.1. Техника дифференцирования

Пусть на множестве E определена функция $y = f(x)$. Допустим, что x – произвольная точка множества E , а $x + \Delta x$ – близкая к ней точка, тоже принадлежащая этому множеству (рис. 1).

Величина Δx называется приращением аргумента, а $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ – приращением функции, соответствующим приращению аргумента Δx .

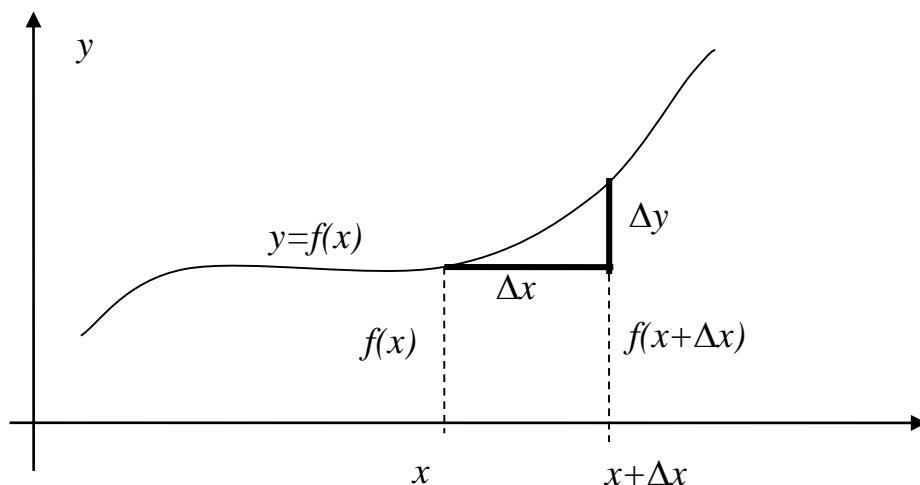


Рис. 1

Определение 12. Производной функцией $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если в точке x производная существует, то функция f называется дифференцируемой в этой точке.

Если t – время, а $y = f(t)$ – некоторый процесс (физический, химический, биологический, экономический), то $f'(t)$ представляет собой скорость (мгновенную) протекания этого процесса в момент t .

Теорема 13. Если функция f дифференцируема в точке x , то она непрерывна в этой точке.

Обратное утверждение неверно. Так, функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в этой точке.

Исходя из определения производной, выведены формулы для производных всех основных элементарных функций и получены основные законы дифференцирования:

$$1. \ c' = 0$$

$$2. \ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \forall \alpha \in R$$

$$\begin{array}{ll}
3. (a^x)' = a^x \ln a, (e^x)' = e^x & 4. (\ln x)' = \frac{1}{x} \\
5. (\sin x)' = \cos x & 6. (\cos x)' = -\sin x \\
7. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} & 8. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \\
9. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & 10. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
11. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} & 12. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}
\end{array}$$

Если $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, то

$$\text{I. } (u + v)' = u' + v'$$

$$\text{II. } (cu)' = cu'$$

$$\text{III. } (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\text{IV. } \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

V. Если $u = u(x)$ – дифференцируемая функция в точке x , а $y = f(u)$ – дифференцируемая в точке u , то производная сложной функции $y = f(u(x))$ равна производной внешней функции по своему аргументу, умноженной на производную внутренней функции по своему:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Примеры нахождения производных.

Пример 1. $y = 5^x + 7 \sin x - x^6 + 3$. Найти y' .

Решение. Используя законы дифференцирования I и II, а также формулы 3), 5), 2), 1), имеем:

$$y' = 5^x \ln 5 + 7 \cos x - 6x^5. \blacksquare$$

Пример 2. $y = x^3 \sqrt{x} + 4\sqrt[5]{x^2} - \frac{3}{x^3}$. Найти y' .

Решение. Вначале перепишем данную функцию в более удобном виде, заменив все корни на степени.

$$y = x^{\frac{7}{2}} + 4x^{\frac{2}{5}} - 3x^{-3}.$$

Теперь находим производную, используя законы I, II и формулу 2):

$$y' = \frac{7}{2} x^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{5} x^{-\frac{3}{5}} + 9x^{-4}. \blacksquare$$

Пример 3. $y = x^4 \sin x$. Найти y' .

Решение. Используем закон III и формулы 2) и 5):

$$y' = 4x^3 \cdot \sin x + x^4 \cos x. \blacksquare$$

Пример 4. $y = \frac{x^5}{x^2 + 1}$. Найти y' .

Решение. Воспользуемся законом IV, т.е. формулой для производной частного:

$$y' = \frac{5x^4(x^2 + 1) - x^5 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^6 + 5x^4}{(x^2 + 1)^2}. \blacksquare$$

Теперь обратим внимание на закон V, дающий возможность дифференцировать сложные функции.

Пример 5. $y = (\operatorname{tg} x)^5$. Найти y' .

Решение. Перед нами сложная функция, у которой внешней является пятая степень, а внутренней – тангенс. Производная внешней функции равна $5(\operatorname{tg} x)^4$, а производная внутренней $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Поэтому, получаем:

$$y' = 5(\operatorname{tg} x)^4 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}. \blacksquare$$

Пример 6. $y = \ln(x^4 + 2x)$. Найти y' .

Решение. Производная внешней функции по своему аргументу равна $\frac{1}{x^4 + 2x}$, а производная внутренней функции, т.е. производная выражения, стоящего в скобках, равна $4x^3 + 2$; поэтому

$$y' = \frac{1}{x^4 + 2x} \cdot (4x^3 + 2). \blacksquare$$

Пример 7. $y = (\operatorname{arctg}(x^3 + 2x))^9$. Найти y' .

Решение. Здесь сложная функция состоит уже из трех звеньев: внешняя – девятая степень, ее аргументом является – арктангенс, а аргументом арктангенса – выражение $(x^3 + 2x)$. Поэтому, дифференцируя в цепочку, получаем:

$$y' = 9(\operatorname{arctg}(x^3 + 2x))^8 \cdot \frac{1}{1 + (x^3 + 2x)^2} \cdot (3x^2 + 2). \blacksquare$$

Пример 8. $y = \frac{\cos^2 x + x^3}{e^{\sin x} + \operatorname{tg} 2x}$. Найти y' .

Решение. Данная функция представляет собой частное. Поэтому в основу дифференцирования закладываем закон IV, но в ходе дифференцирования учитываем, что первое слагаемое числителя, а также оба слагаемых знаменателя – функции сложные:

$$y' = \frac{(2 \cos x \cdot (-\sin x) + 3x^2) \cdot (e^{\sin x} + \operatorname{tg} 2x) - (\cos^2 x + x^3) \left(e^{\sin x} \cdot \cos x + \frac{1 \cdot 2}{\cos^2 2x} \right)}{(e^{\sin x} + \operatorname{tg} 2x)^2}. \blacksquare$$

Приведем еще два примера без подробных объяснений.

Пример 9. $y = \ln(\operatorname{arctg} x) + e^{\operatorname{tg} 5x} \cdot x^4$. Найти y' .

Решение.

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2} + e^{\operatorname{tg} 5x} \cdot \frac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5 \cdot x^4 + e^{\operatorname{tg} 5x} \cdot 4x^3. \blacksquare$$

Пример 10. $y = \frac{x + \ln 4x}{e^x + e^{-x}} + \sin(x^4)$. Найти y' .

Решение.

$$y' = \frac{\left(1 + \frac{1}{4x} \cdot 4\right) \cdot (e^x + e^{-x}) - (x + \ln 4x) \cdot (e^x + e^{-x}) \cdot (-1)}{(e^x + e^{-x})^2} + \cos(x^4) \cdot 4x^3. \blacksquare$$

5.2. Геометрический смысл производной

Пусть $y = f(x)$ – дифференцируемая функция (рис.2), M – точка графика с абсциссой x , N – точка с абсциссой $x + \Delta x$, $NP = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Напомним, что *касательной* к графику функции $f(x)$ в точке M называется предельное положение секущей MN , когда точка N , двигаясь вдоль кривой, приближается к точке M .

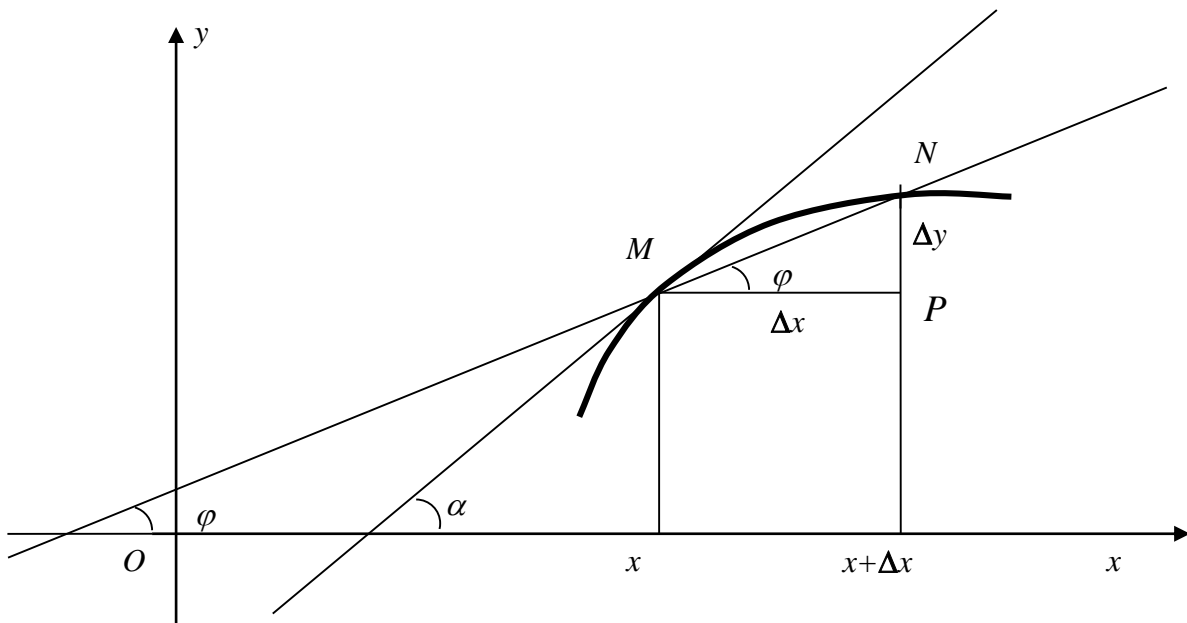


Рис. 2

Обозначим через φ угол наклона к оси абсцисс хорды MN , а через α – угол наклона касательной к кривой в точке M . Ясно, что, когда $N \rightarrow M$, то $\varphi \rightarrow \alpha$. Тогда

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\varphi \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha.$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью функции $\operatorname{tg} \varphi$.

Таким образом, *производная функции $y = f(x)$ в точке x представляет собой угловой коэффициент касательной*, проведенной к данной кривой в точке $M(x, f(x))$. В этом состоит **геометрический смысл производной**.

Составим теперь уравнение касательной, проведенной в точке $M_0(x_0, y_0)$ к кривой $y = f(x)$. Уравнение всякой прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, имеет вид: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Для того, чтобы из этого пучка прямых выделить касательную, надо взять $k = f'(x_0)$. Таким образом, *уравнение касательной* принимает вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Нормалью к данной кривой в точке M_0 называется прямая, проведенная через M_0 перпендикулярно касательной. Используя условия перпендикулярности двух прямых ($k_2 = -\frac{1}{k_1}$), получим *уравнение нормали*:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Пример 11. Найти уравнения касательной и нормали к параболе $y = x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение. Найдем ординату точки M_0 : $y_0 = f(2) = 4$, вычислим производную функции $f(x)$: $f'(x) = 2x$. Тогда $f'(x_0) = f'(2) = 4$. Значит, угловой коэффициент касательной $k_{\text{кас}} = 4$, а угловой коэффициент нормали $k_{\text{норм}} = -\frac{1}{4}$.

Таким образом, уравнение касательной будет иметь вид

$$y - 4 = 4(x - 2),$$

а уравнение нормали:

$$y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2). \blacksquare$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Найти производные следующих функций

1) $y = 3x^4 + 5x^2 - 4;$

2) $y = 5x^3 + 7x + 2;$

3) $y = 4\sqrt{x} + \frac{7}{x^2} + 1;$

4) $y = 3\sqrt[4]{x} - \frac{2}{x} + 5;$

5) $y = 8\sqrt[5]{x^2} + \frac{6}{x^3} - 2x$

6) $y = 2\sqrt[6]{x^5} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 5;$

7) $y = (x^2 + 2x + 1)e^x;$

8) $y = (2\sin x - \cos x)7^x;$

9) $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{\operatorname{tg} x + e^x};$

10) $y = \frac{2\cos x + \operatorname{ctg} x}{3x + \frac{1}{x}};$

11) $y = \sin(\ln 2x);$

12) $y = \sqrt{\operatorname{tg} 4x};$

13) $y = \cos^2(4x + 1);$

14) $y = \arcsin^4(1 - 7x);$

15) $y = 3\operatorname{ctg} \sqrt{x} - 5\operatorname{tg} \frac{1}{x};$

16) $y = 8e^{5x} - 2^{\cos x};$

17) $y = 4\sqrt{1 - 3x} + \ln^3(2x + 1);$

18) $y = \sin(1 + 5x) + \sqrt[3]{1 - e^{2x}};$

19) $y = e^{7x}(\ln 4x + \sqrt{3x + 6});$

20) $y = 5^{x^2}(\cos 3x - 8\sqrt{x});$

21) $y = \cos^4 \frac{1}{x} - x^3 \arccos 7x;$

22) $y = \ln^2 \sqrt{x} + x^4 \operatorname{arcctg}(1 - 3x);$

23) $y = \frac{7\sin 4x + 3}{\sqrt{1 - x^2}} + e^{\operatorname{tg} 4x};$

24) $y = \frac{3\ln(1 - 4x) + 1}{4^x + x^3} - \operatorname{tg}^2(1 + 8x);$

25) $y = x^5 \sin \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}};$

26) $y = (4x^2 + 5)^3 \cos \frac{e^x - 1}{x^2};$

27) $y = 4^{x^2 \operatorname{tg} 2x} + \sqrt[7]{x - \sin(\ln x)};$

28) $y = \cos(\sqrt{x} \ln(1 - x^3)) + \pi x + 1;$

29) $y = \frac{x^2 \operatorname{arctg} 3x}{3x - \sqrt[4]{x}} + \sqrt{\sin(1 + x^2)};$

30) $y = \frac{e^{\operatorname{ctg} 5x}}{\sqrt{x^2 \sin \frac{1}{x}}} + \cos \frac{\pi}{5} x - 4;$

31) $y = \arccos^3(1 - \sqrt[4]{x}) + \operatorname{tg}(5^{-x});$

32) $y = \operatorname{ctg}^2(\sin^3(\ln(1 + x^5)));$

33) $y = \frac{4^{1-7x^2} + e^{2x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} + \cos^2\left(\frac{x}{3} - 1\right);$

34) $y = x^4 \ln \frac{x}{x+1} + \sqrt{\frac{x - \arccos 7x}{\operatorname{ctg} \frac{x}{4}}}.$

Написать уравнения касательных и нормалей к кривым:

35) $y = \frac{x^3}{3}$ в точке $x = -1;$

36) $y = x^2 + 4$ в точке $x = 1$;

37) $y = \frac{8}{4 + x^2}$ в точке $x = 2$;

38) $y = \sin 2x$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$;

39) $y = 4x - x^2$ в точках пересечения с осью Ox ;

40) $y^2 = 4 - x$ в точках пересечения с осью Oy .

§6. НАХОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Следующая теорема дает мощное средство вычисления пределов.

Теорема 14 (правило Лопиталья). Пусть функции f и g удовлетворяют условиям:

- 1) непрерывны в точке a и в некоторой ее окрестности;
- 2) дифференцируемы в окрестности точки a ;
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$;
- 4) существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует предел отношения данных функций и справедливо равенство:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Т.е. предел отношения функций равен пределу отношения их производных.

Пример 12. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + 8x - 9}{4x^4 + 3x - 7}$.

Решение. Условия 1) – 3) очевидно выполнены. Условие 4) всегда проверяется в ходе вычислений. Применяя правило Лопиталья, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + 8x - 9}{4x^4 + 3x - 7} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4 + 8}{16x^3 + 3} = \frac{13}{19}. \blacksquare$$

Замечание. Теорема остается справедливой и в следующих случаях:

- 1) когда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$ или $= -\infty$;
- 2) когда $x \rightarrow +\infty$ или $x \rightarrow -\infty$;
- 3) когда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$.

Таким образом, правило Лопиталя применимо, когда $f(x)$ и $g(x)$ являются либо обе бесконечно малыми (неопределенность вида $(\frac{0}{0})$), либо обе – бесконечно большими (неопределенность вида $(\frac{\infty}{\infty})$).

Пример 13. Вычислить $A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{22+x} - 5}{\sqrt{13+x} - 4}$.

Решение. Здесь мы снова встречаем неопределенность вида $(\frac{0}{0})$, что и позволяет использовать правило Лопиталя:

$$A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{2\sqrt{22+x}}}{\frac{1}{2\sqrt{13+x}}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{13+x}}{\sqrt{22+x}} = \frac{4}{5}. \blacksquare$$

Пример 14. Вычислить $A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби является б.б. функциями, т.е. перед нами – неопределенность вида $(\frac{\infty}{\infty})$. Применив правило Лопиталя, получим:

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Результат говорит о том, что функция $y = \ln x$ хоть и стремится к $+\infty$, но значительно медленнее, чем функция $g(x) = x$. Убедитесь самостоятельно в том, что $\ln x \rightarrow +\infty$ значительно медленнее, чем функция $x^{0,01}$. \blacksquare

Пример 15. Вычислить предел $A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{5^x}$

Решение. Поскольку числитель и знаменатель являются б.б.ф. при $x \rightarrow +\infty$, то применив правило Лопиталя два раза подряд, имеем:

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{5^x \ln 5} = \frac{2}{\ln 5} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{5^x \ln 5} = 0. \blacksquare$$

Пример 16. Вычислить $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{e^{16x} - 1}$.

Решение.

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x \cdot 7 - \cos 3x \cdot 3}{e^{16x} \cdot 16} = \frac{7 - 3}{16} = \frac{1}{4}. \blacksquare$$

Пример 17. Вычислить $A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^{12} + 3x^8 - 7}{20x^{12} + 10x^{11} - 4}$.

Решение. Здесь правило Лопиталья использовать нерационально. В самом деле, каждое применение этого правила снижало бы степень числителя на 1 и степень знаменателя лишь на 1. В то же время, заменяя числитель и знаменатель эквивалентными б.б. функциями, сразу получаем:

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^{12}}{20x^{12}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}. \blacksquare$$

Во многих случаях полезно сочетать использование правила Лопиталья с заменой эквивалентных.

Пример 18. Вычислить $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x^2} - e^{2x^2}}{\sin x \cdot \operatorname{arctg} 4x}$.

Решение. Сначала б.м. множители знаменателя заменим эквивалентными и уже затем применим правило Лопиталья:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x^2} - e^{2x^2}}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x^2} \cdot 10x - e^{2x^2} \cdot 4x}{8x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x^2} \cdot 5 - e^{2x^2} \cdot 2}{4} = \frac{3}{4}. \blacksquare$$

Пример 19. Вычислить $A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

Решение. Здесь перед нами неопределенность вида $(\infty - \infty)$. После приведения выражения в скобках к общему знаменателю получим под знаком предела отношение двух б.м.ф., что дает возможность и замены эквивалентных множителей и применения правила Лопиталья:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2} = 0. \blacksquare$$

В случае неопределенностей вида 0^0 , ∞^0 или 1^∞ следует предварительно прологарифмировать заданную функцию, а затем найти предел ее логарифма.

Пример 20. Найти $A = \lim_{x \rightarrow \infty} (7^x + 4x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Прологарифмируем обе части равенства и, с учетом того, что логарифм является непрерывной функцией, переставим знаки логарифма и предела:

$$\ln A = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} (7^x + 4x)^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln (7^x + 4x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln (7^x + 4x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln (7^x + 4x)}{x}.$$

Мы получили неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$. Значит, теперь можно применить правило Лопиталья:

$$\ln A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{7^x + 4x} \cdot (7^x \ln 7 + 4)}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(7^x \ln 7 + 4)}{7^x + 4x}.$$

Перед нами вновь неопределенность вида $(\frac{\infty}{\infty})$. Применим правило Лопиталя еще дважды:

$$\ln A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^x (\ln 7)^2}{7^x \ln 7 + 4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^x (\ln 7)^3}{7^x (\ln 7)^2} = \ln 7.$$

Итак, $\ln A = \ln 7$. Отсюда, $A = 7$. ■

Пример 21. Найти $A = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

Решение.

$$\ln A = \ln(\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}) = \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(\sin x)^{\operatorname{tg} x}) = \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x \ln(\sin x)) = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg} x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin x} \cos x}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{\sin x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \cos x = 0.$$

Итак, $\ln A = 0 \Rightarrow A = 1$. ■

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Найти пределы

1). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

2). $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^3 - 4x^2 + 5}$

3). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{x}$

4). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{arctg} 4x}$

5). $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$

6). $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$

7). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$

8). $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{a^x - a^3}{x^2 - 9}$

$$9). \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2 + 2x - 8}$$

$$10). \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{22+x} - 5}{\sin(x-3)}$$

$$11). \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 2\pi x}{\sin \pi x}$$

$$12). \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{x - \pi}$$

$$13). \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^2}$$

$$14). \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{5^x}$$

$$15). \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x$$

$$16). \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

$$17). \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) \operatorname{ctg} \pi x$$

$$18). \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} 2x$$

$$19). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$$

$$20). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 3x)}$$

$$21). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$22). \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{ctg} 2x}$$

$$23). \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$$

$$24). \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$25). \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)$$

$$26). \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2} \right)$$

$$27). \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{x^{-2}}$$

$$28). \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$$

$$29). \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}$$

$$30). \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{(x-\pi/4)^{-1}}$$

$$31). \lim_{x \rightarrow \infty} (3^x + 4x^2)^{\frac{1}{x}}$$

$$32). \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}.$$

§7. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

7.1. Монотонность функций. Точки экстремума

Функция f называется *возрастающей* (рис. 3) на интервале (a, b) , если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Функция f называется *убывающей* (рис. 4) на интервале (a, b) , если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Возрастающие и убывающие функции имеют общее название – *монотонные*.

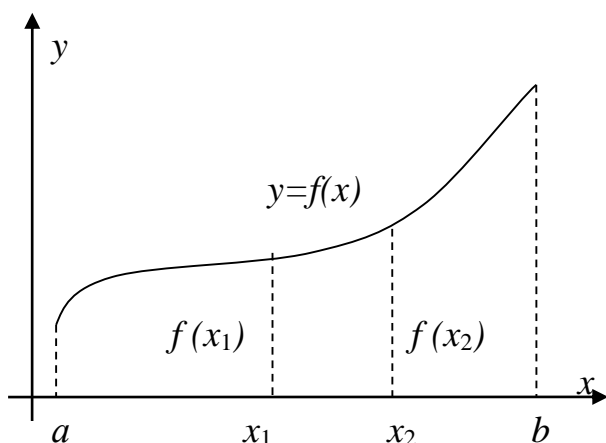


Рис. 3

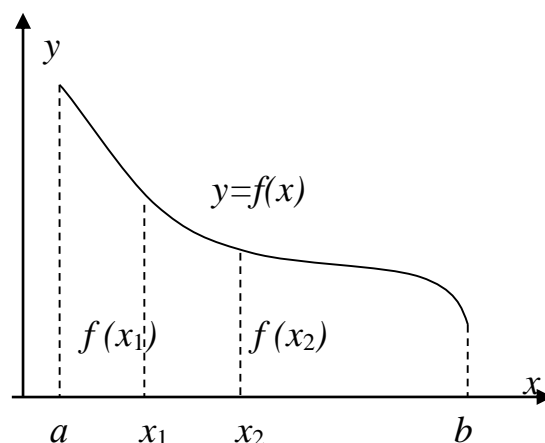


Рис. 4

Оказывается, монотонностью функции управляет знак ее производной. Справедлива следующая теорема:

Теорема 15. Для того чтобы дифференцируемая функция $y = f(x)$ возрастала на интервале (a, b) , необходимо и достаточно, чтобы

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Для того чтобы $f(x)$ убывала на (a, b) , необходимо и достаточно, чтобы

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Пусть на множестве E определена функция f .

Определение 13. Точка $x_0 \in E$ называется *точкой максимума функции f* , если существует окрестность этой точки $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset E$ такая, что

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Аналогично, x_0 точка *минимума*, если существует окрестность этой точки $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset E$ такая, что

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Точки максимума и минимума имеют общее название – *точек экстремума*. Обращаем Ваше внимание на то, что экстремум понятие локальное. Это означает, что указанные неравенства выполняются не на всем множестве E , а в какой то, быть может очень малой окрестности точки x_0 .

Наряду с экстремумами существуют понятия *наибольшего и наименьшего значений функции* на рассматриваемом множестве E . Это – понятие глобальное. Может случиться (см. рис. 5, где $E = (a, b)$), что на множестве E функция f имеет даже несколько точек экстремума и не имеет на нем ни наименьшего, ни наибольшего значений.

Однако, согласно теореме 11, непрерывная на замкнутом отрезке $[a, b]$ функция хотя бы в одной точке этого отрезка принимает наибольшее и хотя бы одной – наименьшее значения. Так, функция f , изображенная на рис. 6 принимает наименьшее значение в точке минимума x_5 , а наибольшее – на правом конце отрезка $[a, b]$, т.е. в точке b .

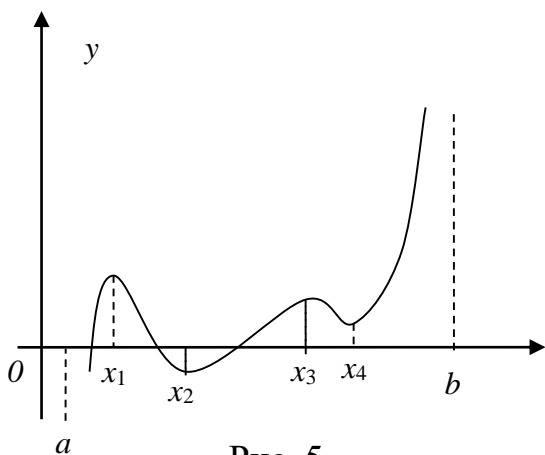


Рис. 5

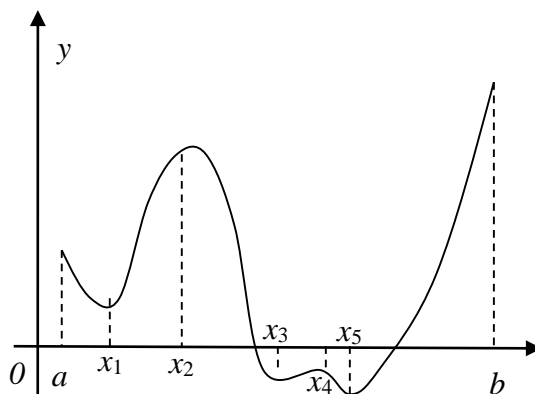


Рис. 6

В общем случае, непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция может достигать наибольшего значения либо в точке максимума, либо на конце отрезка, либо и там, и там. Аналогичное положение имеет место и с наименьшим значением.

О локальности понятия экстремума говорит еще такой факт: значение функции в точке минимума может оказаться больше ее значения в точке максимума (рис.6, точки x_1 и x_4).

Теорема Ферма (необходимое условие экстремума). Если x_0 – точка экстремума функции f и если в этой точке существует производная, то она равна нулю.

Фактически теорема выражает тот факт, что точки экстремума следует искать среди тех, где $f'(x) = 0$ и тех, где $f'(x)$ не существует. Все такие точки называют *подозрительными на экстремум* или *критическими*. Точки, где $f'(x) = 0$ называют также *стационарными*.

Условие равенства нулю производной не является достаточным. Так у функции $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$, однако точка $x = 0$ не является ни точкой минимума, ни точкой максимума.

Теорема 16 (достаточное условие экстремума). Если при переходе через критическую точку x_0 (в которой функция f непрерывна) производная $f'(x)$:

- а) меняет знак с «+» на «-», то x_0 – точка максимума,
- б) меняет знак с «-» на «+», то x_0 – точка минимума,
- в) не меняет знака, то x_0 не является точкой экстремума.

Алгоритм поиска точек экстремума и интервалов монотонности

1-й этап – найти критические точки, т.е. точки, где $f'(x) = 0$ и точки, где $f'(x)$ не существует.

2-ой этап – анализ каждой критической точки, где выясняется меняется ли знак производной при переходе через эту точку (тогда экстремум есть) или не меняется (и тогда экстремума нет).

Параллельно находятся интервалы возрастания и убывания функции.

Пример 22. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = 3x^5 - 5x^3$.

Решение.

1-й этап. Находим производную $y' = 15x^4 - 15x^2$. Приравниваем ее к нулю и решаем полученное уравнение $15x^2(x^2 - 1) = 0$, выписывая и нумеруя корни в порядке их возрастания: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = +1$.

2-ой этап реализуем, сводя все рассуждения в таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	+	0	-	0	-	0	+
y	\nearrow	2	\searrow	0	\searrow	-2	\nearrow
		max		нет		min	

На каждом из интервалов определяем знак производной, вычисляя ее значение в одной из точек:

$$y'(-2)=180, \quad y'\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{45}{16}, \quad y'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{45}{16}, \quad y'(2)=180.$$

Расстановка знаков в таблице дает возможность сделать вывод, что на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; \infty)$ данная функция возрастает, а на интервалах $(-1; 0)$ и $(0; 1)$ она убывает, что показано стрелочками вверх и вниз соответственно. Согласно достаточному признаку экстремума теперь можно заключить, что $x_1 = -1$ – точка максимума, $x_3 = 1$ – точка минимума, а в точке $x_2 = 0$ экстремума нет (как убывала функция до этой точки, так и убывает после нее). Остается подсчитать значения функции в точках экстремума:

$$y_{\max} = y(-1) = 2 \quad \text{и} \quad y_{\min} = y(1) = -2. \blacksquare$$

Пример 23. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции

$$y = \frac{x^2}{x-3}.$$

Решение. Данная функция определена и непрерывна на всей числовой оси, за исключением точки $x = 3$. В этой точке функция вообще не определена. Это точка разрыва. Оказывается, что при переходе через такие точки характер монотонности может измениться. При разбиении области определения функции на интервалы это должно учитываться.

1-й этап. Находим производную

$$y' = \frac{2x(x-3) - x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2},$$

приравниваем ее к нулю, приходим к уравнению

$$x^2 - 6x = 0,$$

корни которого $x_1 = 0$, $x_2 = 6$ – критические точки. Других критических точек нет, так как $x = 3$ интереса не представляет, поскольку в ней не существует данная функция.

2-ой этап проведем, оформляя все в таблицу:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 3)$	$(3; 6)$	6	$(6; +\infty)$
y'	+	0	–	–	0	+
y	\nearrow	0	\searrow	\searrow	12	\nearrow
		max			min	

■

7.2. Выпуклость функций. Точки перегиба

Определение 14. Будем говорить, что на интервале (a, b) функция $f(x)$ *выпукла вверх* (рис. 7), если в пределах указанного интервала график функции расположен ниже касательной.

Будем говорить, что на интервале (a, b) функция $f(x)$ *выпукла вниз* (рис. 8), если в пределах указанного интервала график функции расположен выше касательной.

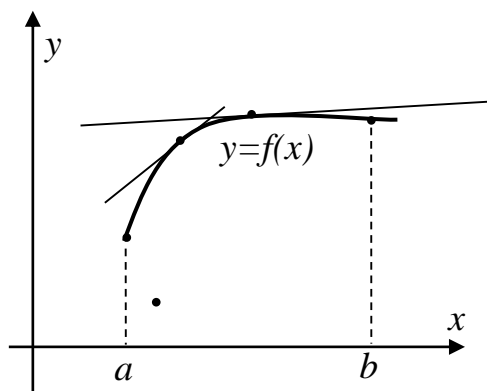


Рис. 7

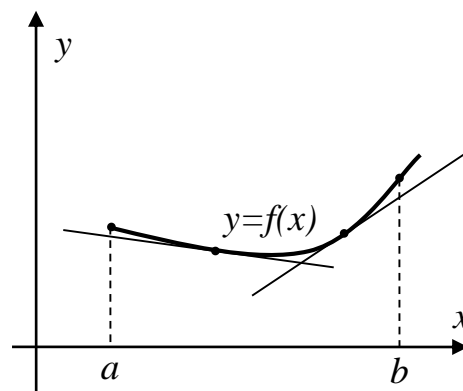


Рис. 8

Характер выпуклости функции тесно связан с поведением ее второй производной.

Теорема 17 (достаточное условие выпуклости).

Если на интервале (a, b) $f''(x) < 0$, то $f(x)$ выпукла вверх на (a, b) .

Если на интервале (a, b) $f''(x) > 0$, то $f(x)$ выпукла вниз на (a, b) .

Напомним, что *второй производной функции* $f''(x)$ называется производная от первой производной $(f'(x))'$.

Определение 15. Точка, в которой существует касательная и при переходе через которую функция меняет характер выпуклости, называется *точкой перегиба*.

Теорема 18 (необходимое условие точки перегиба). Если x_0 – точка перегиба и если в окрестности точки x_0 существует непрерывная вторая производная, то $f''(x_0) = 0$.

Таким образом, подозрительными на перегиб являются те точки, в которых вторая производная либо равна нулю, либо не существует.

Заметим, что необходимое условие точки перегиба не является достаточным. Так у функции $f(x) = x^4$ в точке $x_0 = 0$ вторая производная обращается в нуль, но в этой точке перегиба нет.

Теорема 19 (достаточное условие точки перегиба). Если при переходе через подозрительную на перегиб точку x_0 вторая производная $f''(x)$:

- а) меняет знак, то x_0 – точка перегиба,
- б) не меняет знак, то x_0 – не является точкой перегиба.

Обратим внимание читателя на тот факт, что функция может менять характер выпуклости не только при переходе через точку перегиба, но и при переходе через точку разрыва. В качестве простейшего примера можно взять гиперболу $y = \frac{1}{x}$. Точка $x_0 = 0$ является точкой разрыва этой функции. Слева от нее функция выпукла вверх, а справа выпукла вниз (рис. 9).

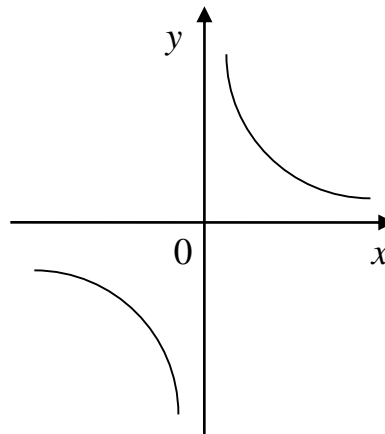


Рис. 9

Алгоритм поиска точек перегиба и определения характера выпуклости

1-й этап – поиск точек, подозрительных на перегиб, т.е. точек, где $f''(x) = 0$ и где $f''(x)$ не существует.

2-ой этап – анализ каждой из полученных точек, где выясняется меняется или не меняется знак $f''(x)$ при переходе через подозрительную точку, после чего делается вывод относительно точек перегиба и определяется характер выпуклости функции на различных интервалах.

Пример 24. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = x^4 - 6x^2 - 6x + 1$.

Решение.

1 этап. Определяем точки, подозрительные на перегиб:

$$\begin{aligned} y' &= 4x^3 - 12x - 6, \quad y'' = 12x^2 - 12 \\ \Rightarrow 12x^2 - 12 &= 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1 \end{aligned}$$

Точек, где y'' не существует, нет.

2 этап рассуждений оформим в виде таблицы:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	\cup	2	\cap	-10	\cup

Из таблицы видно, что на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ данная функция выпукла вниз, а на интервале $(-1; 1)$ – выпукла вверх. Точки $x = -1$ и $x = 1$ являются точками перегиба функции. ■

Пример 25. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = \sqrt[3]{x+2}$.

Решение

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}}, \quad y'' = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x+2)^5}},$$

y'' в нуль не обращается. Единственной подозрительной на перегиб является точка, где y'' не существует, т.е. $x = -2$

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; +\infty)$
y''	$+$	Не сущ.	$-$
y	\cup	0	\cap

7.3. Асимптоты функции

Часто оказывается, что график функции неограниченно близко приближается к некоторой прямой, т.е. расстояние от графика до этой прямой стремится к нулю. Такого рода прямые называют *асимптотами*.

Различают два вида асимптот – *вертикальные и наклонные* (частным случаем которых является *горизонтальные*).

Уравнение вертикальной асимптоты имеет вид $x = a$, где a – точка бесконечного разрыва, т.е. хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Первый из указанных пределов принято называть *пределом слева* (т.к. к числу a мы подходим со стороны меньших чисел), а второй – *пределом справа* (подход осуществляется со стороны больших чисел).

Функция может иметь несколько вертикальных асимптот.

Пример 26. Найти вертикальные асимптоты функции

$$y = \frac{x}{(x-2)(x+3)^2}$$

и выяснить поведение функции при подходе к вертикальным асимптотам.

Решение. Данная функция имеет две точки разрыва: $x = -3$ и $x = 2$. Следовательно, $x = -3$ и $x = 2$ – уравнения вертикальных асимптот. Выясним поведение функции при подходе к асимптотам. Для этого найдем пределы слева и справа (результаты отобразим на рис.10):

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{x}{(x-2)(x+3)^2} = \left(\frac{-3}{-0} \right) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{x}{(x-2)(x+3)^2} = \left(\frac{-3}{-0} \right) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x}{(x-2)(x+3)^2} = \left(\frac{2}{-0} \right) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x}{(x-2)(x+3)^2} = \left(\frac{2}{+0} \right) = +\infty. \blacksquare$$

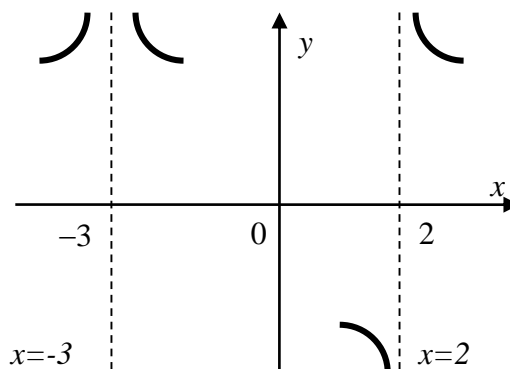


Рис. 10

Прямая $y = kx + b$ является *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если одновременно существуют конечные пределы:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx)$$

или

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx).$$

В первом случае говорят о левосторонней наклонной асимптоте (т.к. $x \rightarrow -\infty$, т.е. “уходит” влево), а во втором случае – о правосторонней наклонной асимптоте ($x \rightarrow +\infty$, “уходя”, тем самым, вправо). Если уравнение правосторонней и левосторонней асимптот совпадают, то говорят о двусторонней наклонной асимптоте. Так известно, например, что многочлены не имеют наклонных асимптот вовсе, а дробно-рациональные функции если имеют наклонную асимптоту, то только двустороннюю. Поэтому, при исследовании дробно-рациональных функций можно не рассматривать отдельно пределы при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$, а брать просто $x \rightarrow \infty$.

Если наклонная асимптота найдена, то следует выяснить расположение графика относительно этой асимптоты. Для этого, вводят в рассмотрение функцию $\gamma(x) = f(x) - y_{\text{асимптоты}}$ и определяют ее знаки. Там, где $\gamma(x) > 0$ – график функции находится над асимптотой, $\gamma(x) < 0$ – график функции лежит под асимптотой, а где $\gamma(x) = 0$ – график пересекает асимптоту (в отличие от вертикальных асимптот, наклонную асимптоту график функции может пересекать!).

Пример 27. Найти наклонную асимптоту функции

$$y = \frac{x^2}{x+1}$$

и выяснить расположение графика относительно наклонной асимптоты.

Решение.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} = -1.$$

Таким образом, уравнение наклонной асимптоты имеет вид: $y = x - 1$. Введем в рассмотрение функцию:

$$\gamma(x) = f(x) - y_{\text{асимптоты}} = \frac{x^2}{x+1} - (x-1) = \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x+1} = \frac{1}{x+1}.$$

Ясно, что

$$\gamma(x) < 0, \forall x \in (-\infty; -1) \quad \text{и} \quad \gamma(x) > 0, \forall x \in (-1; +\infty).$$

Следовательно, на интервале $(-\infty; -1)$ график функции находится ниже асимптоты, а на интервале $(-1; +\infty)$ график расположен выше асимптоты (рис. 11).

Заметим также, что поскольку $\gamma(x) \neq 0$, то график функции не пересекает наклонную асимптоту. ■

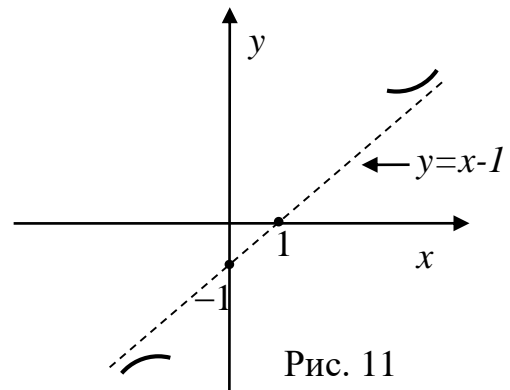


Рис. 11

7.4. Четность, нечетность функции

Определение 16. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любых значений аргумента из области определения функции выполняется равенство:

$$f(-x) = f(x).$$

Примерами четных функций являются $y = x^2$ и $y = \cos x$.

График любой четной функции симметричен относительно оси Oy.

Определение 17. Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если для любых значений аргумента из области определения функции выполняется равенство:

$$f(-x) = -f(x).$$

Примерами нечетных функций являются $y = x^3$ и $y = \sin x$.

График любой нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Все остальные функции, т.е. те, которые не являются четными и не являются нечетными, принято называть *функциями общего вида*.

7.5. Общая схема исследования функции и построение ее графика

1. Область определения функции.
2. Точки разрыва и интервалы непрерывности функции. Вертикальные асимптоты. Поведение функции при подходе к вертикальным асимптотам. Наклонные асимптоты. Расположение графика относительно наклонных асимптот.
3. Четность, нечетность функции.
4. Точки пересечения с координатными осями (с осью Ox точки пересечения находим в том случае, если это не очень затруднительно).
5. Точки экстремума. Интервалы монотонности.
6. Точки перегиба. Интервалы выпуклости.
7. Построение графика, используя всю полученную информацию (в случае необходимости можно вычислить значения функции в одной - двух точках области определения).

Пример 28. Исследовать функцию и построить ее график

$$y = \frac{x^3}{(x-1)^2}.$$

Решение. Используем основную схему исследования:

- 1) Область определения функции: $x \neq 1$, т.е. $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
- 2) Точка разрыва: $x = 1$. Функция непрерывна на интервалах: $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$. Уравнение вертикальной асимптоты: $x = 1$. Выясним поведение функции при подходе к вертикальной асимптоте:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \left(\frac{1}{+0} \right) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \left(\frac{1}{+0} \right) = +\infty.$$

Найдем уравнение наклонной асимптоты, используя эквивалентность б.б. функций:

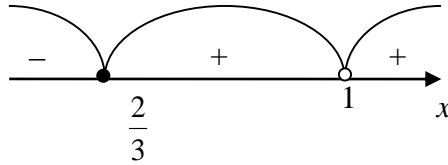
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x-1)^2 x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

Итак, наклонная асимптота имеет уравнение: $y = x + 2$.

$$\gamma(x) = f(x) - y_{\text{асимптоты}} = \frac{x^3}{(x-1)^2} - (x+2) = \frac{x^3 - (x+2)(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{3x-2}{(x-1)^2}.$$

Определим знаки функции $\gamma(x)$:



Значит, слева от точки $x = \frac{2}{3}$ график находится под асимптотой, в частности при $x \rightarrow -\infty$, приближается к ней снизу. Когда $x = \frac{2}{3}$, график пересекает асимптоту (точка пересечения имеет координаты $(\frac{2}{3}; \frac{8}{3})$) и при $x > \frac{2}{3}$ он находится над асимптотой, поэтому при $x \rightarrow +\infty$ приближается к ней сверху.

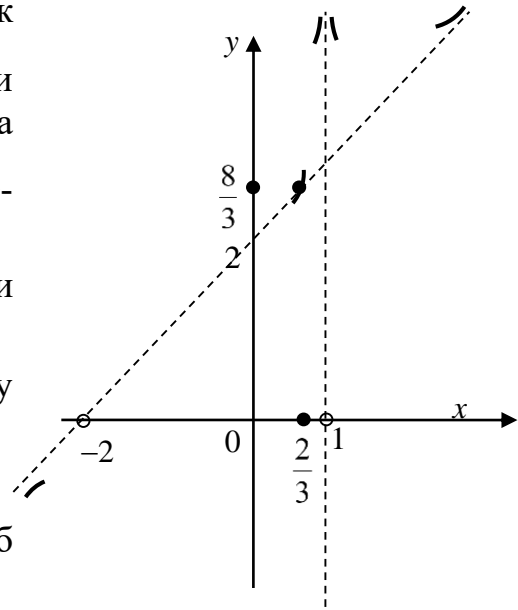


Рис. 12

Всю полученную информацию об асимптотах изобразим на рис. 12.

3) $y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x-1)^2}$. Т.к. $y(-x) \neq y(x)$, то функция не является четной и

т.к. $y(-x) \neq -y(x)$, то функция не является нечетной. Значит, она общего вида.

- 4) Найдем точки пересечения графика функции с осью Ox , для чего полагаем $y = 0$. Получаем

$$\frac{x^3}{(x-1)^2} = 0, \text{ откуда } x = 0.$$

Таким образом, данный график пересекает ось Ox в начале координат.

Для нахождения точки пересечения с осью Oy полагаем $x = 0$. Тогда

$$y = f(0) = \frac{0^3}{(0-1)^2} = 0,$$

т.е. ось Oy график пересекает тоже в начале координат. Других точек пересечения с осями график не имеет.

5) Найдем точки экстремума и интервал монотонности функции

$$y' = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2(x-1)x^3}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-1)(3x-3-2x)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}.$$

Приравнявая $y' = 0$, получим стационарные точки $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Добавим к ним точку $x = 1$, в которой производная y' не существует. Мы нашли критические точки, которые являются подозрительными на экстремум.

Составляем таблицу для определения интервалов монотонности и экстремумов функции:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 3)$	3	$(3; +\infty)$
y'	+	0	+	не сущ.	-	0	+
y	\nearrow	0	\nearrow	не сущ.	\searrow	$\frac{27}{4}$	\nearrow

нет
экстр.

нет
экстр.

min

6) Найдем точки перегиба. Определим характер выпуклости исследуемой функции

$$y'' = \left(\frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} \right)' = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x^3 - 3x^2)}{(x-1)^6} =$$

$$= \frac{(x-1)^2 3x((x-2)(x-1) - x^2 + 3x)}{(x-1)^6} = \frac{6x}{(x-1)^4}.$$

$$y'' = 0 \Rightarrow \frac{6x}{(x-1)^4} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Добавим точку $x = 1$, где y'' не существует. Итак, $x = 0$ и $x = 1$ – точки, подозрительные на перегиб.

Составим таблицу для определения интервалов выпуклости вверх, вниз и точек перегиба графика:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	-	0	+	не сущ.	+
y	\cap	0	\cup	не сущ.	\cup

т. перегиба

- 7) Завершим построение графика (рис. 13), дополнив рис. 12 информацией, полученной в пунктах 3-6. ■

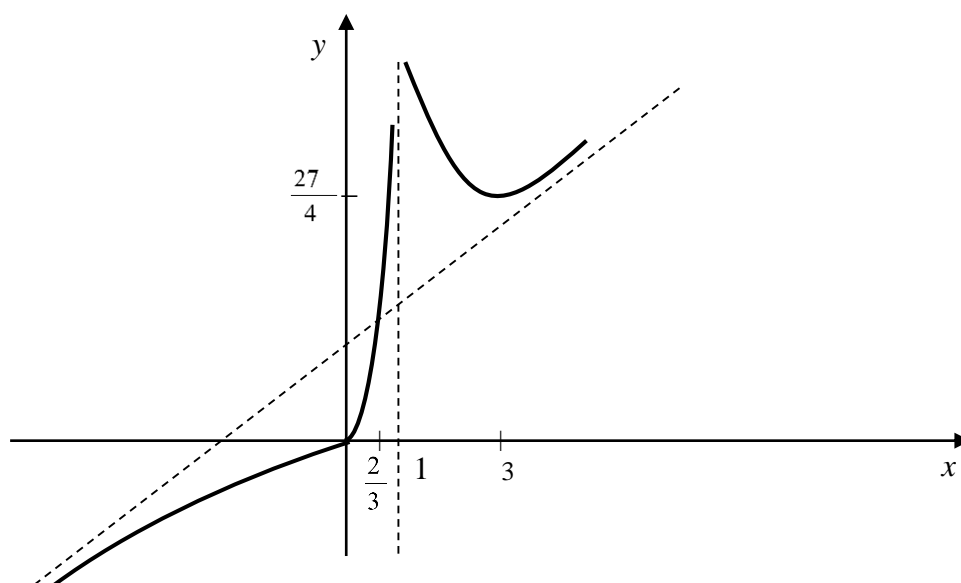


Рис. 13

Пример 29. Исследовать функцию $y = x^2 e^{-x}$ и построить её график.

Решение.

1) Область определения функции: $x \in R$.

2) Точек разрыва нет. Функция непрерывна на всей числовой оси. Вертикальных асимптот нет.

Найдем наклонные асимптоты. Для левосторонней асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = -\infty.$$

Значит, левосторонней асимптоты кривая не имеет. Переходим к поиску правосторонней асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0;$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, правосторонняя асимптота имеет уравнение $y=0$, т.е. это ось Ox .

$$\gamma(x) = f(x) - y_{\text{асимптоты}} = x^2 e^{-x} \geq 0 \quad \text{для всех } x \in R.$$

Это говорит о том, что график функции расположен выше асимптоты и при $x \rightarrow +\infty$ “подходит” к оси Ox сверху.

3) $y(-x) = (-x)^2 e^x = x^2 e^x$, т.е. $y(x)$ является функцией общего вида.

4) Точка $(0; 0)$ является точкой пересечения графика функции и с осью Ox и с осью Oy

5) $y' = 2xe^x - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2 - x)$.

$y' = 0 \Rightarrow xe^{-x}(2 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$ – критические точки.

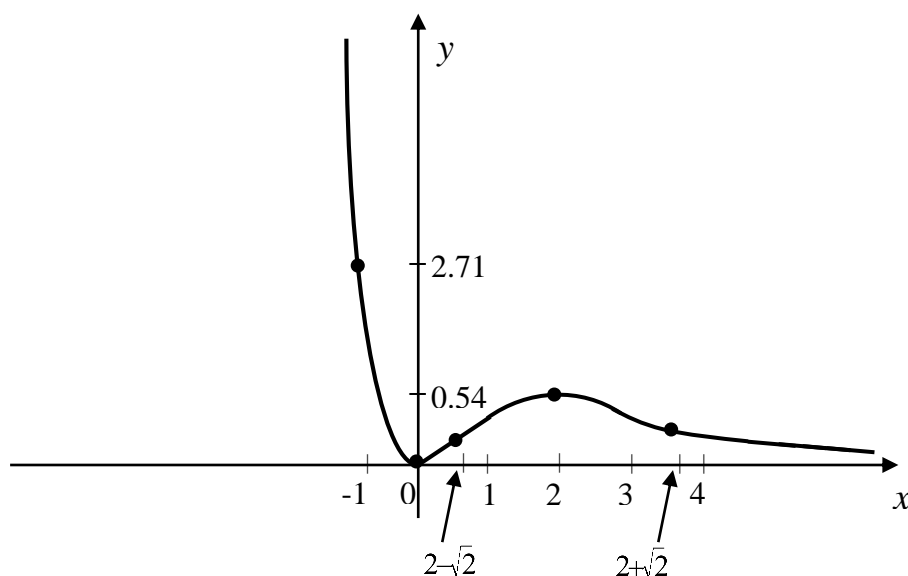
x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	–	0	+	0	–
y	\searrow	0	\nearrow	$\frac{4}{e^2}$	\nearrow
min			max		

6) $y'' = (e^{-x}(2x - x^2))' = -e^x(2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$

$y'' = 0 \Rightarrow e^{-x}(x^2 - 4x + 2) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$ – точки, подозрительные на перегиб.

x	$(-\infty; 2 - \sqrt{2})$	$2 - \sqrt{2}$	$(2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$	$2 + \sqrt{2}$	$(2 + \sqrt{2}; +\infty)$
y''	+	0	–	0	+
y	\cup	$\approx 0,2$	\cap	$\approx 0,4$	\cup
т.перегиба			т.перегиба		

7) Строим график функции (рис. 14), вычисляя дополнительные значения функции в точке $x = -1$: $y(-1) = e \approx 2.71$. ■



ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ*Исследовать функции и построить их графики*

- | | | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|--|
| 1) $y = 3x - x^3$; | 2) $y = x^3 - 12x$; | 3) $y = \frac{x^3}{3} + x^2$; |
| 4) $y = 1 + x - \frac{x^4}{2}$; | 5) $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$; | 6) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 2$; |
| 7) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$; | 8) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$; | 9) $y = \frac{1}{x^2 - 4}$; |
| 10) $y = \frac{x^2 - 1}{x}$; | 11) $y = \frac{x - 1}{x^2}$; | 12) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$; |
| 13) $y = \frac{x^2}{x - 1}$; | 14) $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$; | 15) $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$; |
| 16) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$; | 17) $y = \frac{x^3 + 2}{x^2}$; | 18) $y = \frac{x^3 - 1}{x^2}$; |
| 19) $y = \frac{x^2}{(x - 1)^3}$; | 20) $y = \frac{(x + 1)^3}{x^2}$; | 21) $y = \frac{x - 1}{x^2 - 2x}$; |
| 22) $y = (x - 3)\sqrt{x}$ | 23) $y = (4 - x)\sqrt{x - 1}$; | 24) $y = x + 2\sqrt{-x}$; |
| 25) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$; | 26) $y = \frac{6\sqrt{x}}{x + 2}$; | 27) $y = (x - 1)\sqrt[3]{x^2}$; |
| 28) $y = x \ln x$; | 29) $y = \frac{\ln x}{x}$; | 30) $y = \frac{x}{\ln x}$; |
| 31) $y = \ln(x^2 + 1)$; | 32) $y = \ln(4 - x^2)$; | 33) $y = x \ln^2 x$; |
| 34) $y = xe^x$; | 35) $y = xe^{-x}$; | 36) $y = e^{\frac{x^2}{2}}$; |
| 37) $y = \frac{e^x}{x + 1}$; | 38) $y = x + e^{-x}$; | 39) $y = (x^2 + 1)e^{-x^2}$; |
| 40) $y = \ln(e^x + 1)$; | 41) $y = x \arctg x$; | 42) $y = x + \arctg x$. |

7.6. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Экономические и инженерные задачи

Постановка задачи: найти наибольшее и наименьшее значения дифференцируемой функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Алгоритм решения:

- 1) находим критические точки, принадлежащие отрезку $[a, b]$;
- 2) вычисляем значения функции в этих точках и на концах отрезка;
- 3) из полученных значений выбираем наибольшее и наименьшее.

Пример 30. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 + 6x^2$ на отрезке $[-3; 1]$.

Решение. Находим критические точки:

$$y' = 3x^2 + 12x \Rightarrow 3x^2 + 12x = 0 \Rightarrow 3x(x + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 0.$$

Точка $x_1 = -4$ не принадлежит отрезку $[-3; 1]$ и, поэтому, мы оставляем её без внимания. Теперь вычисляем значения данной функции в точке $x_2 = 0$ и на концах отрезка, т.е. в точках $a = -3$ и $b = 1$:

$$f(0) = 0; f(-3) = 27; f(1) = 7,$$

откуда видно, что

$$f_{\text{наиб}} = f(-3) = 27; f_{\text{наим}} = f(0) = 0. \blacksquare$$

Пример 31. Функция суточного спроса Q на мороженое (тыс. шт.) в зависимости от цены p за одну порцию (руб.) имеет вид $Q = 4.5 - \sqrt{p}$. Эффективная область «работы» этой формулы от 4 до 16 руб. При какой цене за порцию мороженого совокупная выручка будет наибольшей?

Решение. Совокупная выручка определяется формулой $F = Q \cdot p$, где Q – количество реализованных порций мороженого (тыс. шт.), p – цена за одну порцию (руб.). Тогда функция совокупной выручки в зависимости от цены примет вид $F(p) = (4.5 - \sqrt{p})p$. Требуется найти наибольшее значение этой функции на отрезке $[4; 16]$.

Находим критические точки функции, принадлежащие данному отрезку:

$$F'(p) = 4.5 - 1.5\sqrt{p} \Rightarrow 4.5 - 1.5\sqrt{p} = 0 \Rightarrow \sqrt{p} = 3 \Rightarrow p = 9.$$

Вычисляем значения функции в критической точке и на концах отрезка:

$$F(9) = (4.5 - 3) \cdot 9 = 13.5;$$

$$F(4) = (4.5 - 2) \cdot 4 = 10;$$

$$F(16) = (4.5 - 4) \cdot 16 = 8$$

Следовательно, при цене 9 руб. за порцию совокупная выручка будет наибольшей и составит 13.5 тыс. руб. ■

Пример 32. Открытый бассейн имеет форму параллелепипеда объема 1536 м^3 . Какими следует выбрать размеры бассейна, чтобы на его внутреннюю облицовку ушло минимальное количество материала, если длина основания бассейна должна в 8 раз превосходить его ширину? Какое количество облицовочного материала потребуется?

Решение. Обозначим через x – ширину основания бассейна, а через h – глубину. Тогда длина основания бассейна равна $8x$ (рис. 15)

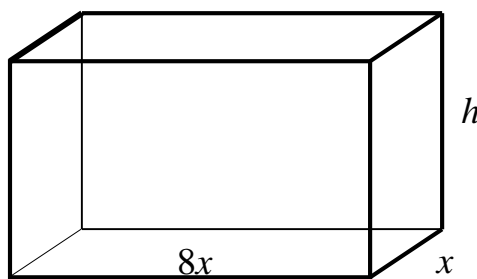


Рис. 15

Интересующая нас функция – площадь внутренней поверхности параллелепипеда имеет вид:

$$S(x) = 8x \cdot x + 2 \cdot 8x \cdot h + 2x \cdot h$$

или

$$S(x) = 8x^2 + 18xh.$$

Высоту бассейна h можно выразить через x , исходя из объёма параллелепипеда: $V = 8x^2h \Rightarrow h = \frac{V}{8x^2}$. Теперь $S(x)$ представляет собой функцию одной переменной:

$$S(x) = 8x^2 + \frac{9V}{4x},$$

и наша задача состоит в том, чтобы определить минимум этой функции. С этой целью находим производную:

$$S'(x) = 16x - \frac{9V}{4x^2} = \frac{64x^3 - 9V}{4x^2}$$

и приравниваем её к нулю. Получаем единственную критическую точку $x_0 = \frac{1}{4} \sqrt[3]{9V}$. Легко проверить, что при переходе через эту точку $S'(x)$ меняет

знак с "–" на "+", т.е. x_0 – точка минимума. Принимая во внимание заданное значение объёма бассейна $V = 1536 \text{ м}^3$, получаем $x_0 = \frac{1}{4} \sqrt[3]{9 \cdot 1536} = 6 \text{ м.}$, т.е. ширина, основания бассейна равна 6 м. В таком случае его длина составляет 48 м, и

глубина $h = \frac{1536}{8 \cdot 6^2} = 5\frac{1}{3}$ м. Именно при этих размерах бассейна на его облицовку расходуется минимальное количество материала, равное

$$S_{\min} = 8 \cdot 6^2 + \frac{9 \cdot 1536}{4 \cdot 6} = 864 \text{ м}^2. \blacksquare$$

Пример 33. Завод D нужно соединить шоссейной дорогой с прямолинейной железной дорогой, на которой расположен город A . Расстояние DB до железной дороги равно 140 км, а расстояние AB по железной дороге равно 300 км (рис. 16). Стоимость перевозок по шоссе в два раза дороже стоимости перевозок по железной дороге. В какую точку C следует провести шоссейную дорогу, чтобы стоимость перевозок груза от завода к городу была минимальной?

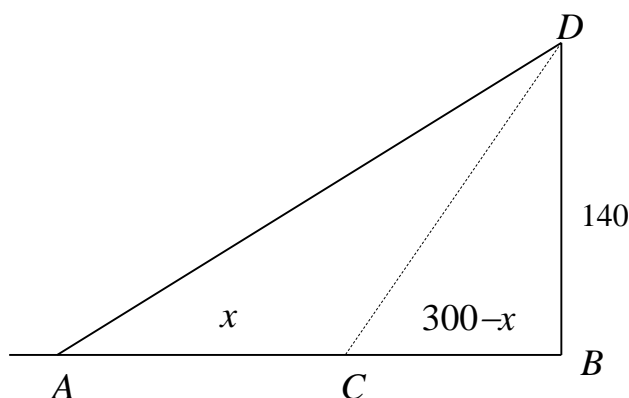


Рис. 16

Решение. Обозначим $AC = x$. Ясно, что $0 \leq x \leq 300$.

Пусть стоимость перевоза по железной дороге (стоимость тоннокилометра) равна p . Тогда стоимость перевоза по шоссе равна $2p$. Общая стоимость перевоза груза

$$f = 2p \cdot DC + p \cdot AC,$$

откуда

$$f(x) = 2p\sqrt{140^2 + (300 - x)^2} + p \cdot x,$$

т.е.

$$f(x) = p(2\sqrt{140^2 + (300 - x)^2} + x).$$

Мы должны выбрать наименьшее значение этой функции на отрезке $[0; 300]$. Найдём производную:

$$f'(x) = p \left(2 \frac{(300 - x) \cdot (-1)}{\sqrt{140^2 + (300 - x)^2}} + 1 \right) = p \frac{2(x - 300) + \sqrt{140^2 + (300 - x)^2}}{\sqrt{140^2 + (300 - x)^2}}.$$

Из условия $f'(x) = 0$ определяем критическую точку:

$$x = 300 - \frac{140}{\sqrt{3}} \approx 219.1$$

Вычисляем значение стоимости перевозок в критической точке и на концах рассматриваемого отрезка:

$$f(0) = p(2\sqrt{140^2 + (300 - x)^2}) \approx 662.11 \text{ р.}$$

$$f(219.1) = p(2\sqrt{140^2 + (80.9)^2} + 219.1) \approx 542.48 \text{ р.}$$

$$f(300) = p(2\sqrt{140^2} + 300) \approx 580 \text{ р.}$$

Итак, чтобы стоимость перевозки груза от завода D к городу A была наименьшей, следует шоссейную дорогу провести в пункт C , находящийся от города на расстоянии 219.1 км. ■

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке

1) $y = x^3 - 9x^2 + 15x$ на $[0; 7]$;

2) $y = 2x^3 - 10x^2 - 16x$ на $[-4; 7]$;

3) $y = x^5 - 5x^4$ на $[-1; 5]$;

4) $y = x + 2\sqrt{-x}$ на $[-4; 0]$;

5) $y = 3\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x} + 4x - 8$ на $[-1; 8]$;

6) $y = x^2 - 2x\sqrt{x} + x - 4$ на $[0; 4]$;

7) $y = \sqrt{x(10 - x)}$ на $[2; 7]$;

8) $y = (x - 2)^2 e^{-x}$ на $[0; 5]$.

9) Открытый жестяной бак с квадратным основанием должен вмещать V литров. При каких размерах на изготовление бака потребуется наименьшее количество жести?

10) В шар вписан цилиндр. Радиус шара – R . Выбрать линейные размеры цилиндра так, чтобы его вместимость была наибольшей.

11) Открытый сосуд состоит из цилиндра, заканчивающегося снизу полусферой. Каковы должны быть размеры сосуда, чтобы при данной вместимости V на него пошло минимум материала?

12) Прямоугольная площадка огораживается с трех сторон проволоочной сеткой, а четвертой стороной примыкает к длинной кирпичной стене. Выбрать длину и ширину площадки так, чтобы ее площадь была наибольшей, если общая длина сетки в рулоне равна 36м.

13) Бак (с крышкой) имеет форму цилиндра. Какими должны быть его размеры, чтобы при заданном объеме V на изготовление ушло наименьшее количество материала?

14) Открытый бак имеет форму круглого цилиндра. Какими должны быть размеры R и H , чтобы при заданном объеме V на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

15) Каковы должны быть размеры цилиндра, вписанного в шар радиуса R , чтобы его боковая поверхность была наибольшей?

§ 8. ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

8.1 Понятие, предел и непрерывность функции двух переменных

В науке и в инженерной практике часто приходится иметь дело с функциями, зависящими не от одного аргумента, а от нескольких. Например, объем прямого кругового цилиндра V является функцией радиуса его основания R и высоты H : $V = \pi R^2 H$, а количество тепла Q , выделяемое в участке проводника, пропорционально времени прохождения тока t , сопротивлению участка R и квадрату силы тока J : $Q = J^2 R t$, т.е. являются функцией трех переменных.

Переменная z называется *функцией аргументов* x и y , если каждой паре чисел (x, y) из некоторого множества на плоскости ставится в соответствие по определенному закону единственное вполне определенной значение z .

Тот факт, что z есть функция аргументов x и y , записывается так $z = f(x, y)$.

Множество точек плоскости (x, y) , для которых z имеет смысл (т.е. может быть вычислено) называется областью определения функции f .

Например, областью определения функции $z = \frac{x + y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ являются множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$x^2 + y^2 < 1,$$

т.е. внутренность единичного круга с центром в начале координат.

Графиком функции $z = f(x, y)$ с областью определения D называется множество точек пространства R^3 с координатами $(x, y, f(x, y))$, где $(x, y) \in D$.

Обычно графиком функции двух переменных является некоторая поверхность (рис. 17).

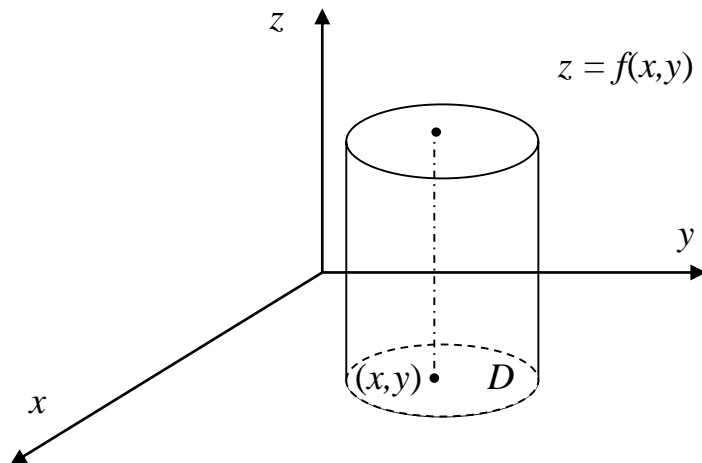


Рис. 17

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – фиксированная точка плоскости. Окрестностью (δ -окрестностью) точки M_0 называется открытый круг радиуса δ с центром в этой точке, δ -окрестность точки M_0 обозначается $U_\delta(M_0)$.

Пусть функция $z = f(x, y) = f(M)$ определена в окрестности точки M_0 . Число A называется *пределом функции $f(M)$* при $M \rightarrow M_0$, если $|f(M) - A|$ может быть сделано меньше любого наперед заданного положительного числа ε за счет того, что точка M очень близко подойдет к точке M_0 , т.е. окажется в очень малой окрестности этой точки. Вот точное

Определение 18.

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists U_\delta(M_0) : |f(M) - A| < \varepsilon \quad \forall M \in U_\delta(M_0).$$

Все теоремы о пределах, которые имели место для функции одной переменной, здесь тоже справедливы.

Определение 19 Функция $z = f(M)$ называется *непрерывной в точке M_0* , если она определена в этой точке, в некоторой ее окрестности и

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0).$$

Функция $z = f(M)$ называется *непрерывной на множестве E* , если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Все основные теоремы о непрерывных функциях, которые верны для функций одной переменной, имеют место и для функций двух переменных.

8.2. Частные производные

Предположим, что функция $z = f(x, y)$ определена в области D (рис. 18).

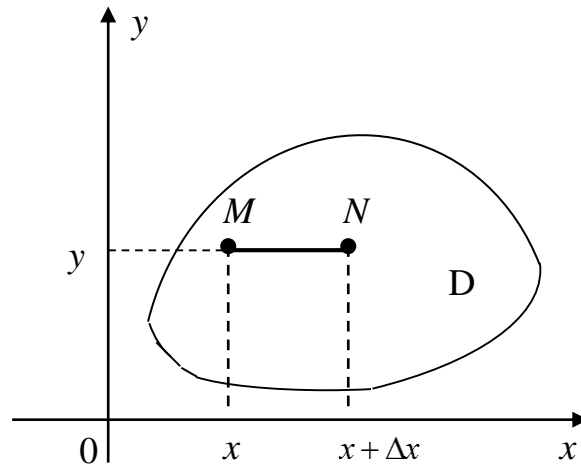


Рис. 18

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка области D и $N(x + \Delta x, y)$ – близкая к ней точка с той же ординатой, тоже лежащая в D .

Величина $f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется частным приращением функции z по переменной x , а предел отношения

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

если он существует, называется *частной производной функции z по аргументу x* и обозначается любым из символов $\frac{\partial z}{\partial x}$ или z'_x . Итак,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется частная производная по y : ($\frac{\partial z}{\partial y}$ или z'_y):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Принцип нахождения частных производных вытекает из самого определения. Для нахождения частной производной по x достаточно y "заморозить на время дифференцирования" и находить производную функции z по переменной x самым обычным образом, т.е. при дифференцировании по x на y следует смотреть как на постоянную и, наоборот, при дифференцировании по y надо "замораживать" x .

Пример 34. $z = 4x^3y^5 - 3\cos x + 5\ln y - 17$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4y^5 \cdot 3x^2 + 3\sin x = 12x^2y^5 + 3\sin x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x^3 \cdot 5y^4 + \frac{5}{y} = 20x^3y^4 + \frac{5}{y}. \quad \blacksquare$$

Пример 35. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^4}) - \operatorname{arctg} x \cdot e^{7y}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^4}} \cdot \left(1 + \frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 + y^4}} \right) - e^{7y} \cdot \frac{1}{1 + x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^4}} \cdot \left(0 + \frac{1 \cdot 4y^3}{2\sqrt{x^2 + y^4}} \right) - \operatorname{arctg} x \cdot e^{7y} \cdot 7. \quad \blacksquare$$

Пример 36. $z = (x^3 + 5x^2)^{\cos(4y^3)}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. При дифференциации по x данная функция рассматривается как степенная, а при дифференциации по y – как показательная; поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(4y^3)(x^3 + 5x^2)^{\cos(4y^3)-1} \cdot (3x^2 + 10x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^3 + 5x^2)^{\cos(4y^3)} \cdot \ln(x^3 + 5x^2) \cdot (-\sin(4y^3)) \cdot 12y^2. \quad \blacksquare$$

8.3. Градиент функции. Производная по направлению

Определение 20. Градиентом функции $z = f(M)$ в точке M_0 называется вектор, координатами которого являются частные производные этой функции, вычисленные в точке M_0 :

$$\operatorname{grad} z \Big|_{M_0} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{M_0}; \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{M_0} \right).$$

Пример 37. Дана функция $z = 4x^3 - 6xy^2 + y^3$. Найти $\operatorname{grad} z \Big|_{M_0}$, где $M_0(-1; 2)$.

Решение. Сначала находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 12x^2 - 6y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -12xy + 3y^2,$$

затем вычисляем их в точке M_0 :

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_0} = 12 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot 2^2 = -12, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_0} = -12 \cdot (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 = 36.$$

Значит, $\text{grad } z|_{M_0} = (-12; 36)$. ■

Пусть $z=f(x,y)=f(M)$ – функция, определенная в области D и M_0 – произвольная фиксированная точка этой области (рис. 19). Пусть, кроме того, нам задано направление \bar{l} .

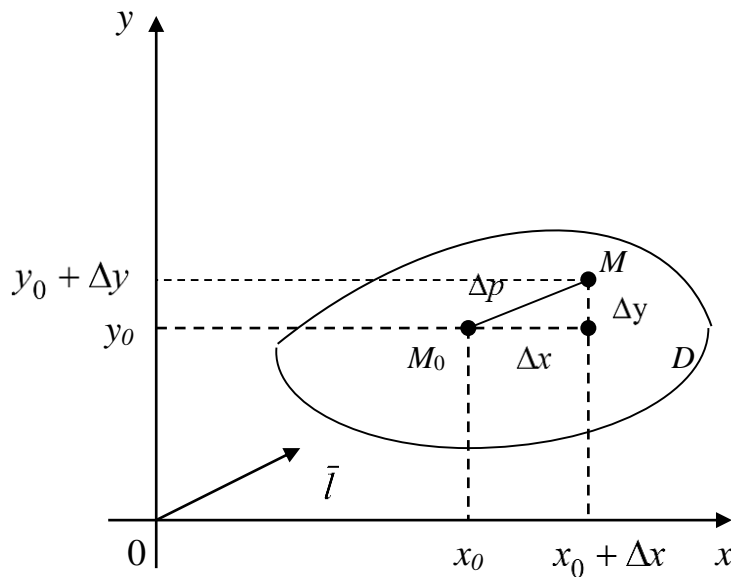


Рис. 19

Дадим возможность точке перемещаться в направлении \bar{l} из положения $M_0(x_0; y_0)$ в положение $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, где M – точка области близкая к M_0 ; расстояние между ними

$$\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Величины Δx и Δy называются *приращениями аргументов*, а

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) -$$

полным приращением функции $z=f(x,y)$ при переходе от точки M_0 к точке M . Разделим Δz на $\Delta \rho$ и перейдем к пределу $\Delta \rho \rightarrow 0$. Если указанный предел существует, то он называется *производной функции z по направлению \bar{l} в точке M_0* и обозначим $\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{M_0}$. Таким образом, по определению

$$\frac{\partial z}{\partial l} \Big|_{M_0} = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta p} = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta p}.$$

Производная по направлению выражает скорость изменения функции в этом направлении.

Между градиентом и производной по направлению имеется тесная связь: *производная по направлению \bar{l} есть скалярное произведение градиента на единичный вектор заданного направления:*

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{l}} \Big|_{M_0} = \text{grad } z \Big|_{M_0} \cdot \bar{l}_0, \quad \bar{l}_0 = \frac{1}{\|\bar{l}\|} \bar{l}.$$

Пример 38. Дана функция $z = 4x^2y^5 + x^3 + 3y^2$ и направление $\bar{l} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

Найти $\text{grad } z \Big|_{M_0}$ и $\frac{\partial z}{\partial \bar{l}} \Big|_{M_0}$, $M_0(2; -1)$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 8xy^5 + 3x^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 20x^2y^4 + 6y.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{M_0} = 8 \cdot 2 \cdot (-1)^5 + 3 \cdot 2^2 = -4, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{M_0} = 20 \cdot 2^2 \cdot (-1)^4 + 6 \cdot (-1) = 74.$$

$$\text{grad } z \Big|_{M_0} = (-4; 74).$$

Найдём единичный вектор заданного направления

$$\|\bar{l}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5, \quad \bar{l}_0 = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$$

и, воспользовавшись связью производной по направлению с градиентом, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{l}} \Big|_{M_0} = -4 \cdot \frac{3}{5} + 74 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{308}{5}. \blacksquare$$

Отметим два важнейших свойства градиента.

Первое – градиент показывает направление, в котором скорость изменения функции максимальна, причём норма градиента равна величине этой максимальной скорости. Другими словами, *градиент указывает направление наибольшего возрастания функции.*

Второе свойство связано с понятием линий уровня.

Определение 21. *Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется множество точек плоскости xOy , в которых функция принимает одно и то же значение c .*

С линиями уровня приходится встречаться практически во всех инженерных дисциплинах. В геодезии и топографии это горизонталы, в метеорологии –

изотермы – линии одинаковых температур и изобары – линии равного давления и т.д.

Второе важное свойство градиента состоит в том, что в каждой точке каждой линии уровня градиент функции перпендикулярен к ней (т.е. к её касательной рис. 20).

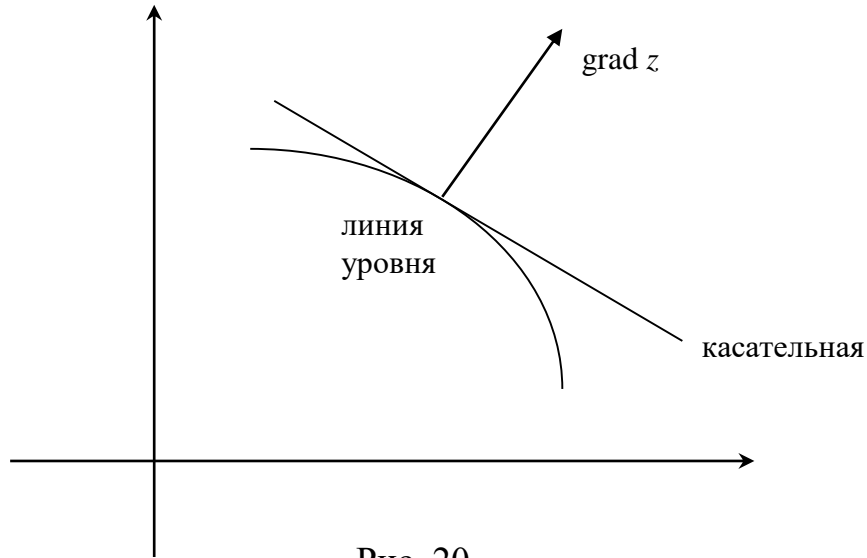


Рис. 20

8.4. Частные производные второго порядка

Предположим, что функция $z = f(x, y)$ имеет в некоторой области D частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Эти производные тоже являются функциями переменных x и y . Поэтому вполне естественно говорить об их частных производных. Определяются эти частные производные следующим образом:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) - \text{вторая частная производная по } x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) - \text{вторая частная производная по } y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) - \text{производная по } y \text{ от уже найденной производной по } x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) - \text{производная по } x \text{ от уже найденной производной по } y.$$

Две последние производные принято называть *смешанными*. Определенные выше производные называются *частными производными второго порядка*.

Пример 39. Дана функция $z = x^3 + 2x^2y^2 + y^5$. Найти частные производные второго порядка.

Решение. Находим сначала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 4xy^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x^2y + 5y^4.$$

Теперь дифференцируем каждую из них и по x и по y :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 4xy^2) = 6x + 4y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(4x^2y + 5y^4) = 4x^2 + 20y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 4xy^2) = 8xy; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(4x^2y + 5y^4) = 8xy. \quad \blacksquare$$

Обратите внимание на то, что смешанные производные оказались равны. Случайно ли это? Оказывается, что нет.

Теорема 20. Если функция $z = f(x, y)$, определенная в области D , имеет вторые частные производные, являющиеся непрерывными функциями, то

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

8.5. Экстремумы функций двух переменных

Пусть $z = f(x, y)$ – функция, определенная на интервале множества E . Тогда $M_0(x_0, y_0) \in E$ называется *точкой максимума* функции $z = f(x, y)$, если существуют окрестность этой точки $U_\delta(M_0)$ такая, что: $f(M_0) \geq f(M)$, $\forall M \in U_\delta(M_0)$. Определение *точки минимума* аналогично. Общие названия точек максимума и минимума – *точки экстремума*.

Теорема 21. (Необходимое условие экстремума) Если M_0 – точка экстремума и если в этой точке существуют частные производные, то они равны нулю:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_0} = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_0} = 0.$$

Точки, в которых частные производные первого порядка обращаются в нуль, называются *стационарными*. Если к ним добавить точки, в которых частные производные не существуют, то вместе эти точки называются *критическими*. Они являются точками, подозрительными на экстремум.

Условие равенства нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием экстремума. Так, например, у функции $z = x^2 - y^2$ точка $(0; 0)$ является стационарной, но не является экстремальной, так как в любой окрестности точки $(0; 0)$ есть точки вида $(x; 0)$, в которых $z > 0$, и точки вида $(0; y)$, в которых $z < 0$.

Теорема 22 (Достаточное условие экстремума). Пусть в окрестность критической точки M_0 функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

$$\text{Пусть } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{M_0}, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{M_0}, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{M_0}, \Delta = A \cdot C - B^2.$$

Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то M_0 – точка экстремума, причем при $A > 0$ – точка минимума, а при $A < 0$ – точка максимума;

2) если $\Delta < 0$, то M_0 не является точкой экстремума;

3) если $\Delta = 0$, то никакого вывода сделать нельзя и требуются дополнительные исследования.

Пример 40. Найти точки экстремума функции

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Решение. Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Ищем стационарные точки:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

т.е. $M_1(0;0)$, $M_2(1;1)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Исследуем точку $M_1(0;0)$. Для этой точки:

$$A=0; B=-3; C=0, \Delta = -9 < 0.$$

Значит, точка M_1 не является точкой экстремума.

Теперь исследуем точку $M_2(1;1)$. Для неё: $A=6$, $B=-3$, $C=6$, $\Delta = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0$.

Значит, точка M_2 – точка экстремума и, поскольку $A > 0$, то это точка минимума. Подставляя координаты точки M_2 в исследуемую функцию, получим $z_{\min} = -1$.

Таким образом, $M_2(1; 1)$ – точка минимума, $z_{\min} = z|_{M_2} = -1$. ■

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$

1) $z = x^3 + 2xy^2 + y^4;$

2) $z = 3x^2 + 8\sqrt{x}y^3 + 2y;$

3) $z = 4x^2 + \sqrt{x^2 - y};$

4) $z = 8\sqrt{y} - \sqrt{x + y^4};$

5) $z = x^3 e^{-x+8y};$

6) $z = y^2 \ln(x^2 + 7y);$

7) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + y\sqrt{x};$

8) $z = \ln(1 + \sqrt{x})e^{-y^2} + 1;$

9) $z = (4x + 5y^2) \sin \frac{x}{y^5};$

10) $z = 5^{\sqrt{x}} \arcsin \left(\ln \frac{y}{x} \right);$

11) $z = \frac{4x + \sqrt{y}}{\sin(5x-y)} + e^{\operatorname{tg} x};$

12) $z = \frac{\operatorname{tg}^2(5x - y^4)}{3xy^2 + \sqrt{y}} - \ln(\cos 3y);$

13) $z = (3x + \cos 4x)^{\arccos 7y};$

14) $z = (\cos^2 y + 1)^{5x^2+4}.$

Найти $\operatorname{grad} z \Big|_{M_0}$ и $\frac{\partial z}{\partial \bar{l}} \Big|_{M_0} :$

15) $z = 3x^2 + 2xy - y^3, \quad M_0(0;1), \quad \bar{l} = (3; 4);$

16) $z = -x^3 + 3xy^2 + 2y, \quad M_0(-1;2), \quad \bar{l} = 6\bar{i} + 8\bar{j};$

17) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad M_0(-3;4), \quad \bar{l} = (12;-5);$

18) $z = \sqrt{x^2 + y}, \quad M_0(2;5), \quad \bar{l} = \bar{i} - \bar{j};$

19) $z = x^2 \sqrt{x+4y}, \quad M_0(1;2), \quad \bar{l} = (4;-3);$

20) $z = (x^2 + y^3) \sqrt{2x^2 - y}, \quad M_0(4;7), \quad \bar{l} = 6\bar{i} - 8\bar{j}.$

Найти частные производные 2-го порядка:

21) $z = 3x^2 + y^5 + xy;$

22) $z = 5x - 3x^2y + 7y^3;$

23) $z = xe^{2y};$

24) $z = x \ln(x + y);$

25) $z = \sin^2 x + \sin y;$

26) $z = x^2 \sin \sqrt{y}.$

Найти экстремумы функции двух переменных:

27) $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$;

28) $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$;

29) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$;

30) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$;

31) $z = xy(1 - x - y)$;

32) $z = x^3 - y^3 - 3xy$;

33) $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$;

34) $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$;

35) $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$;

36) $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$;

37) $z = 4 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$;

38) $z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$.

§9. ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Функции находят широкое применение в экономической теории и практике. Наиболее часто в экономике используются следующие функции:

- 1) *функция полезности* – зависимость полезности, т.е. результата, эффекта некоторого действия от уровня (интенсивности) этого действия;
- 2) *производственная функция* – зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов;
- 3) *функция выпуска* – зависимость объема производства от наличия или потребления ресурсов;
- 4) *функция издержек* – зависимость издержек производства от объема выпуска продукции;
- 5) *функции спроса, потребления и предложения* – зависимость объема спроса, потребления, предложения на отдельные товары и услуги от различных факторов (цены, дохода и т.п.).

Рассмотрим зависимости спроса $q(p)$ и предложения $s(p)$ от цены на товар p . Чем меньше цена, тем больше спрос. В свою очередь, предложение растет с увеличением цены на товар.

Изображая в одной системе координат кривые спроса и предложения (рис. 21), можно установить *равновесную цену* p_0 (т. е. цену, при которой достигается равенство спроса и предложения) данного товара в процессе формирования цен в условиях конкурентного рынка.



Рис. 21

Пример 41. Даны функции спроса $q = \frac{p+6}{p+1}$ и предложения $s = 2p+1.5$, где

p – цена товара. Найти равновесную цену и равновесный объем «спроса-предложения».

Решение. Найдем равновесную цену, приравнявая q и s :

$$\frac{p+6}{p+1} = 2p+1.5 \Rightarrow 2p^2 + 2.5p - 4.5 = 0 \Rightarrow p_1 = -\frac{9}{4}, \quad p_2 = 1.$$

Т. к. цена не может быть отрицательной, то равновесная цена $p_0=1$.

Вычислим теперь равновесный объем «спроса-предложения», т.е. найдем значение функции спроса (или предложения), соответствующее равновесной цене:

$$q(1) = s(1) = 3.5. \quad \blacksquare$$

Рассматривая функции издержек $C(Q)$ и дохода фирмы $R(Q)$, можно установить зависимость прибыли $P(Q) = R(Q) - C(Q)$ от объема производства Q и выявить уровни объема производства, при которых производство продукции убыточно (когда $P(Q)<0$), приносит прибыль (когда $P(Q)>0$), а также найти объем производства, приводящий к максимальной прибыли ($P(Q) \rightarrow \max$).

Пример 42. Постоянные издержки F (не зависящие от числа x единиц произведенной продукции) составляют 125 тыс. руб. в месяц, а переменные издержки $V(x)$ (пропорциональные x) – 700 руб. за каждую единицу продукции. Цена единицы продукции равна 1200 руб. Найти объем продукции x , при котором прибыль составит 100 тыс. руб. в месяц.

Решение. Издержки производства x единиц продукции составят

$$C(x) = F + V(x) = 125 + 0.7x.$$

Доход от реализации этой продукции $R(x) = 1.2x$. Тогда прибыль

$$P(x) = R(x) - C(x) = 0.5x - 125 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Прибыль $P(x)$ должна быть равна 100 тыс. руб., т.е. $100 = 0.5x - 125 \Rightarrow x = 450$ ед. Таким образом, объем продукции должен составлять 450 ед. \blacksquare

При решении многочисленных экономических задач очень часто используются элементы дифференциального исчисления.

Задача о производительности труда

Пусть функция $u(t)$ выражает количество произведенной продукции u за время t , и необходимо найти производительность труда в момент времени t_0 .

За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $u_0 = u(t_0)$ до значения $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$. Тогда средняя производительность труда за этот период времени составит $z_{\text{cp}} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$.

Очевидно, что производительность труда в момент t_0 можно определить как предельное значение средней производительности за период от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$, т.е.

$$z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} z_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u'.$$

Таким образом, *производительность труда есть производная объема произведенной продукции по времени.*

Пример 43. Объем продукции u (ед.), произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением

$$u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50 \quad (\text{ед.}), \quad 1 \leq t \leq 8,$$

где t – рабочее время в часах. Вычислить производительность труда и скорость ее изменения через час после начала работ и за час до ее окончания.

Решение. Производительность труда есть производная объема продукции по времени:

$$z(t) = u'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100 \quad (\text{ед./ч}),$$

а скорость ее изменения – производная от производительности труда:

$$z'(t) = -5t + 15 \quad (\text{ед./ч}^2).$$

В заданные моменты времени $t_1 = 1$ и $t_2 = 8 - 1 = 7$ соответственно имеем:

$$\begin{aligned} z(1) &= 112.5 \quad (\text{ед./ч}), & z'(1) &= 10 \quad (\text{ед./ч}^2); \\ z(7) &= 82.5 \quad (\text{ед./ч}), & z'(7) &= -20 \quad (\text{ед./ч}^2). \end{aligned}$$

Итак, к концу работы производительность труда существенно снижается; при этом изменения знака $z'(t)$ с плюса на минус свидетельствуют о том, что увеличение производительности труда в первые часы рабочего дня сменяется ее снижением в последние часы. ■

Рассмотрим еще одно понятие, иллюстрирующее экономический смысл производной.

Задача нахождения предельных издержек производства

Издержки производства C будем рассматривать как функцию объема выпускаемой продукции Q . Пусть ΔQ – прирост продукции, тогда ΔC – приращение издержек производства, а $\frac{\Delta C}{\Delta Q}$ – среднее приращение издержек производства

на единицу продукции. Производная $C' = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q}$ выражает *предельные издержки* производства и характеризует приближенно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции.

Пример 44. Зависимость между издержками производства C и объемом продукции Q выражается функцией $C = 30Q - 0.09Q^3$. Определить средние и предельные издержки при объеме выпускаемой продукции, равном 10 ед.

Решение. Функция средних издержек (на единицу продукции) имеет вид:

$$\bar{C} = \frac{C}{Q} = \frac{30Q - 0.09Q^3}{Q} = 30 - 0.09Q^2.$$

При $Q = 10$ средние издержки равны:

$$\bar{C} = 30 - 0.09 \cdot 10^2 = 21 \text{ (ден. ед.)}.$$

Функция предельных издержек выражается производной:

$$C'(Q) = 30 - 0.27Q^2.$$

При $Q = 10$ предельные издержки составят:

$$C'(10) = 30 - 0.27 \cdot 10^2 = 3 \text{ (ден. ед.)}.$$

Таким образом, средние издержки на производство единицы продукции составляют 21 ден. ед., а предельные издержки, т.е. дополнительные затраты на производство дополнительной продукции (при объеме выпускаемой продукции 10 ед.), составят 3 ден. ед. ■

Аналогично предельным издержкам могут быть определены *предельная выручка, предельный доход, предельный продукт, предельная полезность, предельная производительность* и другие предельные величины.

Пример 45. Производственная функция задается формулой $Y = K^{0.5} \cdot L^{0.5}$, где K – капитал, L – труд. Найти предельный продукт труда при $K = 4$, $L = 25$.

Решение. Предельный продукт труда будет выражаться частной производной по переменной L :

$$Y'_L = K^{0.5} \cdot 0.5L^{-0.5} = \frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{L}}.$$

При $K = 4$ и $L = 25$ получим:

$$Y'_L \Big|_{(4;25)} = \frac{\sqrt{4}}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{5} = 0.2. \quad \blacksquare$$

Вообще, учитывая, что экономические явления и процессы обуславливаются действием различных факторов, для их исследования широко используют функции нескольких переменных. Среди них выделяют *мультипликативные функции*, позволяющие представить зависимую переменную в виде произведения факторных переменных, обращающих ее в нуль при отсутствии действия хотя бы одного фактора. В рассмотренном выше примере производственная функция является мультипликативной.

Для исследования экономических процессов и решения различных прикладных задач часто используется понятие эластичности функции.

Эластичностью функции $E_x(y)$ называется предел отношения относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'.$$

Эластичность функции показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция y при изменении независимой переменной x на 1%.

Пример 46. Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (тыс. руб.) и выпуском продукции x (млн. руб.) выражается функцией

$$y = -0.5x + 80.$$

Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, равном 60 млн. руб.

Решение. Найдем эластичность себестоимости:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{-0.5x + 80} \cdot (-0.5) = \frac{x}{x - 160}.$$

При $x = 60$ $E_{60}(y) = -0.6$, т.е. при выпуске продукции, равном 60 млн. руб., увеличение его на 1% приведет к снижению себестоимости на 0.6%. ■

Пример 47. Для мультипликативной производственной функции $Y = 2K^{0.6} \cdot L^{0.5}$ найти коэффициент эластичности по капиталу.

Решение.

$$E_k(Y) = \frac{K}{Y} \cdot Y'_K = \frac{K}{2K^{0.6}L^{0.5}} \cdot 1.2K^{-0.4}L^{0.5} = 0.6. \blacksquare$$

Эластичность функций применяется при анализе спроса и потребления. Эластичность спроса y относительно цены x – это коэффициент, приближенно показывающий, на сколько процентов изменится спрос при изменении цены на 1%. Если эластичность спроса (по абсолютной величине) $|E_x(y)| > 1$, то спрос считают *эластичным* относительно цены, если $|E_x(y)| < 1$, то *неэластичным*, а если $|E_x(y)| = 1$, то *нейтральным*.

Если спрос эластичный, то с возрастанием цены продукции суммарный доход от ее реализации увеличивается, а если спрос неэластичный – то уменьшается.

Пример 48. Зависимость между спросом q и ценой p единицы продукции, выпускаемой некоторым предприятием, задается соотношением $q = 18 - \sqrt{p}$. Найти эластичность спроса. Выяснить, при каких значениях цены спрос является эластичным, нейтральным и неэластичным.

Решение.

$$E_p(q) = \frac{p}{18 - \sqrt{p}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{p}} \right) = -\frac{\sqrt{p}}{2(18 - \sqrt{p})}.$$

Спрос нейтрален, если $|E_x(y)| = 1$, т.е. $\frac{\sqrt{p}}{2(18 - \sqrt{p})} = 1$. Решая это уравнение,

получим $p = 144$ ден. ед. Далее, учитывая, что $p > 0$ и $q > 0$ (т.е. $p < 324$), имеем, что если $0 < p < 144$, то спрос является неэластичным, а при $144 < p < 324$ – эластичным. \blacksquare

Рассмотрим функцию полезности $u = u(x; y)$. Ее линии уровня называются *кривыми безразличия*. Их уравнения имеют вид: $u(x; y) = c$, где c – произвольная константа. Вдоль кривых безразличия полезность двух благ x и y одна и та же.

Если задана *линия бюджетного ограничения* $p_x \cdot x + p_y \cdot y = A$ при ценах благ p_x и p_y и доходе потребителя A , то можно установить оптимальные количества благ x_0 и y_0 , имеющие максимальную полезность u_0 (рис. 22).

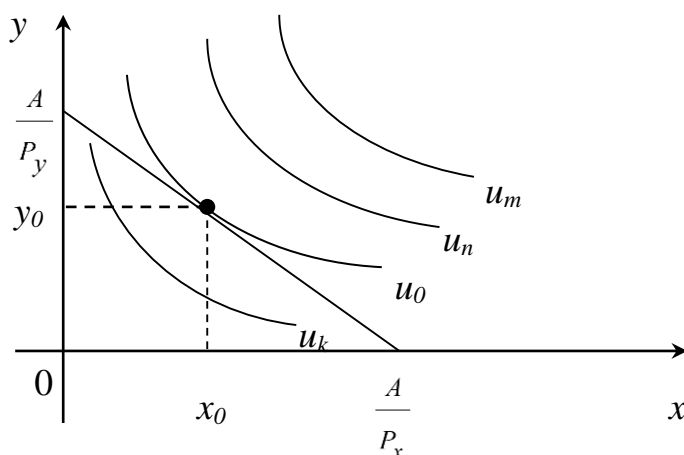


Рис. 22

Пример 49. Функция полезности имеет вид:

$$u(x; y) = 2 \ln(x - 1) + 3 \ln(y - 1).$$

Цена единицы первого блага равна 8 ден. ед., а второго – 16. На приобретение этих благ может быть затрачена сумма, равная 1000 ден. ед. Как следует распределить эту сумму между двумя благами, чтобы полезность от их приобретения была бы наибольшей?

Решение. По условию $8x + 16y = 1000 \Rightarrow x = 125 - 2y$.

Тогда

$$u = 2 \ln(124 - 2y) + 3 \ln(y - 1).$$

Имеем:

$$u' = 2 \frac{1}{124 - 2y} \cdot (-2) + 3 \cdot \frac{1}{y - 1} = \frac{5y - 188}{(y - 62)(y - 1)}.$$

Отсюда $y = \frac{188}{5}$ – точка, подозрительная на экстремум. Т.к. слева от этой точки

$u' > 0$, а справа $u' < 0$, то в точке $y = \frac{188}{5}$ функция u имеет максимум. Таким об-

разом, $y = \frac{188}{5} = 37.6 \Rightarrow x = 125 - 37.6 \cdot 2 = 49.8$. Итак, оптимальный набор благ: $x = 49.8$, $y = 37.6$. ■

Иногда при решении экономических задач приходится находить экстремумы функций двух переменных.

Пример 50. Производственная функция (в денежном выражении) имеет вид

$$K(x; y) = 30\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y},$$

(где x и y – количество единиц первого и второго ресурса). Стоимость ед. первого ресурса – 5, второго – 10 (ден. ед.). Найти максимальную прибыль при использовании этих ресурсов.

Решение. Производственная функция в денежном выражении равна доходу от использования ресурсов. При этом издержки $C(x; y) = 5x + 10y$. Таким образом, функция прибыли:

$$P(x; y) = 30\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y} - 5x - 10y.$$

Требуется найти ее максимум. Частные производные:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 15x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} - 5; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 10x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}} - 10.$$

Приравнивая их к нулю, найдем критическую точку: $x = 81$, $y = 27$.

Частные производные второго порядка имеют вид:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\frac{15}{2}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{3}}; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = 5x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{20}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{5}{3}}.$$

Отсюда

$$A = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Big|_{(81;27)} = -\frac{5}{162}; \quad B = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \Big|_{(81;27)} = \frac{5}{81};$$

$$C = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \Big|_{(81;27)} = -\frac{20}{81}; \quad \Delta = A \cdot C - B^2 = \frac{25}{81^2} > 0.$$

Т.к. $\Delta > 0$ и $A < 0$, то в точке $x = 81$, $y = 27$ находится максимум. Соответствующее значение прибыли $P = 135$ ден. ед. ■

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1) Даны функции спроса $q = \frac{p+8}{p+2}$ и предложения $s = p+0.5$, где p – цена товара. Найти равновесную цену и равновесный объем «спроса-предложения».

2) Функции спроса q и предложения s на некоторый товар от его цены p задаются уравнениями:

$$q = \frac{2p+15}{p+5}; \quad s = \frac{3p+15}{p+10}.$$

Найти равновесную цену и равновесный объем.

3) Объем производства зимней обуви u (ед.), выпускаемой некоторой фирмой, может быть описан уравнением: $u = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t + 6t + 2100$ (ед.), где t – календарный месяц года. Вычислить производительность труда и скорость ее изменения в начале года ($t = 0$), в сентябре ($t = 9$) и в конце года ($t = 12$).

4) Себестоимость производства телевизоров y (тыс. руб.) описывается функцией $y = 0.01x^2 - 0.5x + 12$, где $10 \leq x \leq 50$, где x – объем выпускаемой продукции в месяц (тыс. ед.). Определить скорость изменения себестоимости при выпуске 20 и 40 тыс. ед. продукции.

5) Зависимость издержек производства C от объема выпускаемой продукции Q выражается формулой: $C = 20Q - 0.05Q^3$ ден. ед. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции $Q = 10$ ед.

6) Выручка от продаж конфет составляет $p = 100x - 0.5x^2$, где x – объем проданной продукции (тыс. ед.). Найти среднюю и предельную выручки, если продано : а) 20 тыс. ед. , б) 60 тыс. ед.

7) Функция полных затрат в зависимости от объема выпускаемой продукции задана соотношением : $y = x^3 - 2x^2 + 96$. При каком объеме производства предельные и средние затраты совпадают?

8) Себестоимость продукции y связана с объемом выпускаемой продукции x уравнением $y = 6 \ln(1 + 3x)$. Определить среднюю и предельную себестоимости выпускаемой продукции при объеме, равном 10 ед.

9) Функции спроса q и предложения s от цены p выражается соответственно уравнениями: $q = 7 - p$ и $s = p + 1$. Найти эластичность спроса и предложения для равновесной цены.

10) Зависимость между себестоимостью готовой продукции предприятия y (млн. руб.) и объемом выпускаемых изделий x (тыс. шт.) выражается уравнением: $y = \sqrt{x + 4} - 2$. Найти эластичность себестоимости продукции предприятия, выпускающего 12 тыс. шт. изделий.

11) Производственная функция задается формулой $Y = 4K^{0.5}L^{0.6}$, где K – капитал, L – труд. Найти коэффициент эластичности по труду.

12) Для следующих функций спроса q найти значения p , при которых спрос является эластичным:

$$\text{а) } q = 4 - \frac{2}{3}p; \quad \text{б) } q = 50(15 - \sqrt{p}); \quad \text{в) } q = \sqrt[3]{3600 - p^2}.$$

13) Функция полезности потребителя имеет вид $u = \sqrt{xy}$. Цена на благо $x = 5$, на благо $y = 10$. Доход потребителя равен 200. Найти оптимальный набор благ потребителя.

14) Потребитель имеет возможность потратить сумму 1000 (ден. ед.) на приобретение x единиц первого товара и y единиц второго товара. Заданы функция полезности $u(x; y)$ и цены p_1, p_2 единицы соответственно первого и второго товаров. Найти значения x_0 и y_0 , при которых полезность для потребителя будет наибольшей:

$$\text{а) } u(x; y) = \frac{1}{2} \ln(x - 2) + 2 \ln(y - 1), \quad p_1 = 0.2, \quad p_2 = 4;$$

$$\text{б) } u(x; y) = 2(x - 1)^{\frac{1}{4}} + (y - 1)^{\frac{1}{3}}, \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 3.$$

15) Полезность от приобретения x единиц первого блага и y единиц второго блага имеет вид: $u(x; y) = \ln(x) + \ln(2y)$. Ед. первого блага стоит 2 ден. ед., а второго – 3 ден. ед. На приобретение благ планируется потратить 100 ден. ед. Как следует распределить эту сумму, чтобы полезность была наибольшей?

16) Задана производственная функция $K(x; y)$, цены p_1 и p_2 единицы первого и второго ресурсов, а также ограничение A в сумме, которая может быть потрачена на приобретение ресурсов. Найти величины используемых ресурсов x_0, y_0 , при которых фирма-производитель получит наибольшую прибыль:

$$\text{а) } K(x; y) = 10\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}, \quad p_1 = 2, p_2 = 4, A = 12;$$

$$\text{б) } K(x; y) = 24\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y^2}, \quad p_1 = 27, p_2 = 4, A = 6.$$

Найти также величину наибольшей прибыли.

17) Найти величины используемых ресурсов (x, y) , при которых фирма-производитель получит максимальную прибыль, если заданы производственная функция $K(x, y)$ и цены p_1 и p_2 единицы первого и второго ресурсов

$$\text{а) } K(x; y) = 30\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}, \quad p_1 = 4, p_2 = \frac{1}{48};$$

$$б) K(x;y) = 10\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y^2} \quad p_1=2, p_2=\frac{2}{3}.$$

18) Производится два вида продукции x и y . Цена единицы продукции x составляет 8 ден. ед., единицы продукции y – 10 ден. ед. Функция затрат

$$C = x^2 + xy + y^2.$$

Найти оптимальный для производителя план выпуска продукции (x_0, y_0) , при котором величина прибыли будет максимальной. Найти размер этой прибыли.

ГЛАВА 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Понятие неопределенного интеграла

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$, если ее производная совпадает с $f(x)$, т.е.

$$F'(x) = f(x).$$

В простейших случаях первообразную можно найти сразу, зная формулы для производных. Например, если $f(x) = \cos x$, то $F(x) = \sin x$.

Заметим, что задача отыскания по заданной функции $f(x)$ ее первообразной неоднозначна. Если $F(x)$ – первообразная, то и функция $F(x) + c$, где c – произвольная постоянная, также является первообразной для $f(x)$, т.к.

$$(F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

В связи с этим возникает вопрос: существуют ли у функции $f(x)$ первообразные другого вида, нежели $F(x) + c$? Оказывается, что нет. Другими словами, любые две первообразные функции $f(x)$ могут различаться лишь на константу.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ (обозначается $\int f(x)dx$) называется множество всех первообразных этой функции:

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Операция нахождения первообразной по ее производной или неопределенного интеграла по заданной подынтегральной функции называется **интегрированием** этой функции.

Операции дифференцирования и интегрирования являются взаимно обратными, т.е.

$$1) \left(\int f(x) dx \right)' = f(x);$$

$$2) \int f'(x) dx = f(x) + c.$$

Для проверки правильности выполнения интегрирования нужно продифференцировать результат и получить подынтегральную функцию. Например,

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + c, \text{ т.к. } \left(\frac{x^2}{2} + c \right)' = x.$$

Несмотря на тесную связь между интегрированием и дифференцированием, оказывается, что интегрирование – задача несравненно более сложная, чем дифференцирование. Ее решение требует знания разнообразных методов, сообразительности и большой тренировки.

Начнем (также мы поступали и с производными) с таблицы неопределенных интегралов. Справедливость всех формул легко проверяется дифференцированием правых частей.

Таблица неопределенных интегралов

$$1) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad (\alpha \neq -1)$$

$$2) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c,$$

$$3) \int dx = x + c,$$

$$4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,$$

$$5) \int e^x dx = e^x + c,$$

$$6) \int \sin x dx = -\cos x + c,$$

$$7) \int \cos x dx = \sin x + c,$$

$$8) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c,$$

$$9) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c,$$

$$10) \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c,$$

$$11) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c,$$

$$12) \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c,$$

$$13) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c,$$

$$14) \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c,$$

$$15) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + c,$$

$$16) \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c,$$

$$17) \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + c,$$

$$18) \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + c.$$

Заметим, что интегралы от некоторых элементарных функций уже могут не являться элементарными функциями.

Примеры некоторых из них:

$$\int e^{x^2} dx; \quad \int \sin(x^2) dx; \quad \int \frac{\cos x}{x} dx \text{ и др.}$$

Обратите внимание на то, что продифференцировать эти функции нам бы не составило труда, а с интегралами дело обстоит иначе.

1.2. Свойства линейности неопределенного интеграла

Продолжая аналогии с производными, переходим к рассмотрению правил интегрирования.

Правило 1. Если $f(x)$ – непрерывная функция, а k – произвольное число, то

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx.$$

Другими словами, константа выносится за знак интеграла.

Правило 2. Если $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функция, то

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

Другими словами, интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов.

Правило 3. Если $\int f(x) dx = F(x) + c$, то

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c.$$

Указанные правила интегрирования принято называть **свойствами линейности** неопределенного интеграла.

Сравнивая их с правилами дифференцирования, мы обнаруживаем, что отсутствуют формулы для интегрирования произведения, частного и произвольной сложной функции (правило 3 позволяет интегрировать лишь “самые простые” сложные функции, т.е. сложные функции линейного характера).

Именно этим и объясняется, почему интегрировать намного сложнее, чем дифференцировать. Нехватка формул частично компенсируется различными методами интегрирования. Вычисление интегралов с использованием свойств линейности и таблицы интегралов принято называть **непосредственным интегрированием**. Покажем на примерах, как работает этот метод.

Пример 1. Найти интеграл

$$\int \left(5x^3 - 2x^2 + \frac{4}{x} \right) dx.$$

Решение. Воспользуемся первыми двумя правилами интегрирования и формулами (1) и (2) из таблицы интегралов:

$$\int \left(5x^3 - 2x^2 + \frac{4}{x} \right) dx = 5 \int x^3 dx - 2 \int x^2 dx + 4 \int \frac{dx}{x} = 5 \cdot \frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} + 4 \ln|x| + c. \blacksquare$$

Пример 2. Найти интеграл

$$\int \left(\frac{5}{\cos^2 x} - \frac{3}{x^2 - 25} + \cos 7x \right) dx.$$

Решение. Разбиваем на сумму интегралов:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{5}{\cos^2 x} - \frac{3}{x^2 - 25} + \cos 7x \right) dx &= 5 \int \frac{dx}{\cos^2 x} - 3 \int \frac{dx}{x^2 - 25} + \int \cos 7x dx = \\ &= 5 \operatorname{tg} x - \frac{3}{10} \ln \left| \frac{x-5}{x+5} \right| + \frac{1}{7} \sin 7x + c. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались табличными интегралами (8), (14) и (7) совместно с третьим правилом интегрирования (отсюда появление множителя $\frac{1}{7}$ перед синусом). \blacksquare

Пример 3. Найти интеграл

$$\int \left(\frac{1}{9x-5} + e^{\frac{x}{4}} \right) dx.$$

Решение. Разбиваем на два интеграла и в каждом из них применяем правило 3:

$$\int \left(\frac{1}{9x-5} + e^{\frac{x}{4}} \right) dx = \frac{1}{9} \ln|9x-5| + 4e^{\frac{x}{4}} + c. \blacksquare$$

Пример 4. Найти интеграл

$$\int (x^2 + 4)^3 dx.$$

Решение. С учетом формулы куба суммы, имеем:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 4)^3 dx &= \int (x^6 + 12x^4 + 48x^2 + 64) dx = \int x^6 dx + 12 \int x^4 dx + 48 \int x^2 dx + \\ &+ 64 \int dx = \frac{x^7}{7} + 12 \cdot \frac{x^5}{5} + 48 \cdot \frac{x^3}{3} + 64x + c. \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 5. Найти интеграл

$$\int \frac{5x^4 - 7x^2 + 6\sqrt{x} + 1}{x} dx.$$

Решение. Избавимся от частного, произведя почленное деление:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^4 - 7x^2 + 6\sqrt{x} + 1}{x} dx &= \int \left(5x^3 - 7x + 6x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x} \right) dx = \\ &= 5 \int x^3 dx - 7 \int x dx + 6 \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int \frac{dx}{x} = 5 \cdot \frac{x^4}{4} - 7 \cdot \frac{x^2}{2} + 6 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \ln|x| + c. \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 6. Найти интеграл

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx.$$

Решение. Сразу произвести почленное деление невозможно, поэтому сначала преобразуем числитель дроби:

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \int \frac{(x^2 + 1) - 1}{x^2 + 1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2 + 1} = x - \arctg x + c. \blacksquare$$

В примерах 4 – 6 мы использовали следующий важный принцип: *переходить (по возможности) от произведения, частного и сложной функции к суммам*. В дальнейшем мы будем руководствоваться этими соображениями неоднократно.

Пример 7. Найти интеграл

$$\int \sin 5x \cdot \sin 3x \, dx.$$

Решение. Переходим под знаком интеграла от произведения функций к сумме:

$$\begin{aligned} \int \sin 5x \cdot \sin 3x \, dx &= \int \frac{\cos 2x - \cos 8x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 8x \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + c. \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 8. Найти интеграл

$$\int \cos^2 5x \, dx.$$

Решение. С учетом формулы понижения степеней, получим

$$\int \cos^2 5x \, dx = \int \frac{1 + \cos 10x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 10x \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{20} \sin 10x + c. \blacksquare$$

В примерах 7 и 8 использованы формулы, приведенные в приложении в конце пособия. Эти и другие формулы (хорошо известные еще из школьного курса математики) помогут Вам при интегрировании.

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.

Найти интегралы, используя свойства линейности:

1) $\int (4x^3 + 7x - 2) \, dx;$

2) $\int (7x^5 - 2x^3 + 1) \, dx;$

3) $\int \left(5 \sqrt[3]{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \right) \, dx;$

4) $\int \left(\sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) \, dx;$

5) $\int (5 \sin 4x + e^{3x}) \, dx;$

6) $\int \left(2 \operatorname{tg} 4x - \cos \frac{x}{3} \right) \, dx;$

7) $\int (\sqrt{4x-2} + \cos(7x+4)) dx;$

8) $\int \left(\frac{3}{7x-2} - 2e^{5x} \right) dx;$

9) $\int (x^2 - 1)^2 dx;$

10) $\int (x^4 + 2)^2 dx;$

11) $\int \frac{4x^2 + 3x + 1}{\sqrt{x}} dx;$

12) $\int \frac{5x^3 - 2x^2 + 4}{x\sqrt{x}} dx;$

13) $\int \frac{(\sqrt{x} + 2)^3}{x^2} dx;$

14) $\int \frac{(x-3)^3}{x^2} dx;$

15) $\int (e^x + e^{-x})^2 dx;$

16) $\int 2^x (4^{2x} + 5^x) dx;$

17) $\int \sin^2 3x dx;$

18) $\int \operatorname{tg}^2 4x dx;$

19) $\int \cos 4x \cdot \cos 8x dx;$

20) $\int \sin 7x \cdot \sin 5x dx;$

21) $\int \frac{x^2}{x^2 + 4} dx;$

22) $\int \frac{x}{x+2} dx;$

23) $\int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx;$

24) $\int \frac{x^2}{x-3} dx;$

25) $\int \sin^4 x dx;$

26) $\int \cos^4 2x dx;$

27) $\int \frac{dx}{\cos^4 x - \sin^4 x};$

28) $\int \frac{dx}{\cos x + \sin x}.$

1.3. Метод подстановки

При нахождении многих интегралов оказывается эффективной следующая идея: вместо исходной переменной x вводят новую переменную по формуле $x = \varphi(t)$ или $\varphi(x) = t$ (где φ – дифференцируемая функция) таким образом, чтобы относительно новой переменной интеграл был значительно проще (в идеале – табличным), вычисляют этот полученный интеграл, а затем возвращаются к исходной переменной. Такой прием называют **методом подстановки**.

Если $f(x)$ – непрерывная функция, $F(x)$ – ее первообразная, а $\varphi(x)$ – дифференцируемая функция, то изложенная идея выглядит так:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x) dx = dt \end{array} \right| = \int f(t) dt = F(t) + c = F(\varphi(x)) + c.$$

Возможность таких преобразований легко проверяется дифференцированием:

$$(F(\varphi(x)) + c)' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) + 0 = f(\varphi(x)) \varphi'(x).$$

Рассмотрим на примерах метод постановки (его еще иногда называют **методом замены переменной**).

Пример 9. Найти интеграл

$$\int \sin^7 x \cdot \cos x dx.$$

Решение. Сделаем подстановку: $\sin x = t$. После нахождения дифференциалов от обеих частей этого равенства, получим $\cos x dx = dt$. Тогда

$$\int \sin^7 x \cdot \cos x dx = \int t^7 dt = \frac{t^8}{8} + c = \frac{\sin^8 x}{8} + c. \blacksquare$$

Пример 10. Найти интеграл

$$\int \frac{\ln x}{x} dx.$$

Решение.

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c. \blacksquare$$

Пример 11. Найти интеграл

$$\int \frac{x^5}{x^6 + 5} dx.$$

Решение.

$$\int \frac{x^5}{x^6+5} dx = \left| \begin{array}{l} x^6+5=t \\ 6x^5 dx=dt \\ x^5 dx=\frac{dt}{6} \end{array} \right| = \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{6} \ln|t| + c = \frac{1}{6} \ln|x^6+5| + c. \blacksquare$$

Как правильно выбрать подстановку? Из каких соображений производится замена? Какого-то одного “железного” правила не существует. Однако можно дать ряд рекомендаций, руководствуясь которыми легче “угадать” подстановку.

Рекомендация 1. В большинстве случаев заменяется такая функция, производная от которой (возможно с некоторым коэффициентом) присутствует в интеграле в качестве сомножителя.

Именно так были выбраны подстановки в примерах 9 – 11. Приведем еще один пример, ярко иллюстрирующий данную мысль.

Пример 12. Найти интеграл

$$\int \frac{x^2}{x^6+5} dx.$$

Решение. По внешнему виду данный интеграл очень похож на предыдущий (из примера 11). Однако подстановка $x^6+5=t$ не приводит к успеху в этом случае. Вместе с тем, достаточно обратить внимание на множитель в числителе и подумать – производная какой функции дает x^2 ? Так мы “разгадываем” замену $x^3=t$, а остальное уже “дело техники”:

$$\int \frac{x^2}{x^6+5} dx = \left| \begin{array}{l} x^3=t \\ 3x^2 dx=dt \\ x^2 dx=\frac{dt}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2+5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} + c = \frac{1}{3\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x^3}{\sqrt{5}} + c. \blacksquare$$

Рекомендация 2. Рассмотрим несколько идей, полезных при интегрировании тригонометрических выражений:

Интегралы вида

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx,$$

где m и n – целые числа, находят следующим образом:

– если m и n – четные числа, то применяют формулы понижения степеней;

– если m или n – нечетные числа, то интеграл находят, отделяя от нечетной степени один множитель

Пример 13. Найти интеграл

$$\int \sin^4 x \cdot \cos^3 x \, dx.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cdot \cos^3 x \, dx &= \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x \, dx = \int \sin^4 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \, dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right| = \int t^4 (1 - t^2) \, dt = \int t^4 \, dt - \int t^6 \, dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + c = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + c. \blacksquare \end{aligned}$$

Если R – рациональная функция, то интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x) \, dx$$

вычисляют путем универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. То-

гда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Пример 14. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}.$$

Решение. Применяя подстановку $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, получим

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c. \blacksquare$$

Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то применяют подстановку $\operatorname{tg} x = t$. Отсюда

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}, x = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример 15. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}.$$

Решение. Применяя подстановку $\operatorname{tg} x = t$, имеем

$$\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \int \frac{1}{1 + \frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + c. \blacksquare$$

Рекомендация 3. Некоторые советы для интегрирования *иррациональных функций*.

Интегралы вида

$$\int R \left(x, (ax+b)^{\frac{p_1}{q_1}}, (ax+b)^{\frac{p_2}{q_2}} \right) dx,$$

где R – рациональная функция, p_1, q_1, p_2, q_2 – целые числа, находят с помощью подстановки $ax+b=t^n$, где n – наименьшее общее кратное чисел q_1 и q_2 . Такая замена позволяет избавиться от иррациональности.

Пример 16. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}.$$

Решение. Т.к. число 6 является наименьшим общим кратным чисел 2 и 3, то

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} &= \left| \begin{array}{l} x=t^6 \\ dx=6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^3(1+t^2)} = 6 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = 6 \int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1} dt = 6 \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \\ &= 6 \int dt - 6 \int \frac{dt}{t^2+1} = 6t - 6 \operatorname{arctg} t + c = 6(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x}) + c. \blacksquare \end{aligned}$$

Интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$$

находят подстановкой $x = a \sin t$;

интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$$

- подстановкой $x = a \operatorname{tg} t$;

интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$$

- подстановкой $x = \frac{a}{\sin t}$.

Пример 17. Найти интеграл

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| = \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dx = \int \cos^2 t dt = \\ &= \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + c = \frac{1}{2} \left(\arcsin x + \frac{1}{2} \sin(2 \arcsin x) \right) + c. \blacksquare \end{aligned}$$

И последняя рекомендация, но, пожалуй, самая важная: чтобы овладеть методом подстановки нужно самостоятельно решить большое количество примеров. Только с опытом Вы научитесь “видеть” замены и как следствие решать даже самые сложные примеры.

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Найти интегралы, используя метод подстановки:

1) $\int (x^2 + 5)^7 x dx$;

2) $\int (x^3 + 4)^8 x^2 dx$;

3) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$;

4) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}}$;

5) $\int \frac{x^3}{x^4 + 7} dx$;

6) $\int \frac{x^2}{1 - x^3} dx$;

7) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$;

8) $\int \frac{\sqrt{\ln x + 5}}{x} dx$;

9) $\int \frac{\ln^4 x + 3}{x} dx;$

11) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 25} dx;$

13) $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1 - 4^x}};$

15) $\int \frac{x^2}{x^6 - 16} dx;$

17) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^8 - 1}} dx;$

19) $\int \frac{\operatorname{tg}^5 x}{\cos^2 x} dx;$

21) $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x \sqrt{1 - x^2}};$

23) $\int \frac{dx}{(\operatorname{arctg} x + 2)(1 + x^2)};$

25) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x - 16};$

27) $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^7 2x};$

29) $\int \cos^5 3x \sin 3x dx;$

31) $\int \cos^4 x \sin^3 x dx;$

33) $\int \frac{dx}{x^2 \cos^2 \frac{1}{x}};$

35) $\int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{4 + x^2} dx;$

37) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} dx;$

39) $\int \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x - 7}} dx;$

10) $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x - 4)};$

12) $\int \sqrt{e^x + 7} e^x dx;$

14) $\int \frac{5^x dx}{\sqrt{25^x + 7}};$

16) $\int \frac{x}{x^4 + 9} dx;$

18) $\int \frac{x^2}{x^6 + 49} dx;$

20) $\int \frac{1}{(\operatorname{ctg}^2 x + 16) \sin^2 x} dx;$

22) $\int \frac{\operatorname{tg}^4 x + 4 \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x \cos^2 x} dx;$

24) $\int \frac{\arccos^3 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$

26) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x};$

28) $\int \frac{\sin 4x dx}{\sqrt{9 - \cos^2 4x}}.$

30) $\int \sin^7 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx;$

32) $\int \sin^9 x \cos^3 x dx;$

34) $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$

36) $\int \frac{\operatorname{arcctg} 4x}{1 + 16x^2} dx;$

38) $\int \frac{\sqrt{x}}{x + 2} dx;$

40) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} dx;$

41) $\int \sqrt{9-x^2} dx;$

42) $\int \sqrt{4-3x^2} dx;$

43) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x};$

44) $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x} dx;$

45) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x};$

46) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}.$

1.4. Метод интегрирования по частям

Суть метода заключается в использовании формулы

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (1.1)$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции.

Для применения этой формулы подынтегральное выражение следует представить в виде произведения одной функции u на дифференциал другой функции dv . При переходе от левой части формулы (1.1) к ее правой части мы должны функцию u дифференцировать, а выражение dv – интегрировать.

Пример 18. Найти интеграл

$$\int x \cos 2x dx.$$

Решение. Заметим, что данный интеграл не берется ни с помощью свойств линейности, ни методом подстановки. Применим формулу (1.1). В качестве функции u возьмем x , а в качестве dv – $\cos 2x dx$. Имеем:

$$\begin{aligned} \int x \cos 2x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos 2x dx & \Rightarrow v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c. \blacksquare \end{aligned}$$

Удачное применение метода интегрирования по частям приводит к интегралу, который проще исходного. Для этого нужен правильный выбор множителей u и dv .

Общий принцип здесь такой: за u надо принимать функцию, которая при дифференцировании упрощается, а за dv – функцию, которую несложно интегрировать. Множитель dv обязательно должен содержать dx .

Более сложным представляется следующий вопрос: а как определить, что в том или ином интеграле нужно применять именно метод интегрирования по частям? Попробуем ответить на этот вопрос.

Типы интегралов, вычисляемых по частям

$$\text{I. } \int P_n(x) \left\{ \begin{matrix} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{matrix} \right\} dx,$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n , а запись $\left\{ \begin{matrix} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{matrix} \right\}$ означает, что в интеграле может стоять или $\sin \alpha x$, или $\cos \alpha x$.

В качестве функции u следует выбрать $P_n(x)$, а в качестве $dv = \left\{ \begin{matrix} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{matrix} \right\} dx$.

При этом формула интегрирования по частям применяется столько раз, какова степень многочлена, т.е. n раз.

Простейшим примером интеграла данного типа является интеграл, рассмотренный в примере 18.

$$\text{II. } \int P_n(x) \left\{ \begin{matrix} e^{\alpha x} \\ a^{\alpha x} \end{matrix} \right\} dx.$$

Выбор функций: $u = P_n(x)$, $dv = \left\{ \begin{matrix} e^{\alpha x} \\ a^{\alpha x} \end{matrix} \right\} dx$. Формула интегрирования по частям применяется n раз.

Пример 19. Найти интеграл

$$\int x^2 e^{4x} dx.$$

Решение. Используем формулу (1.1):

$$\int x^2 e^{4x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = e^{4x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{4} e^{4x} \end{array} \right| = \frac{1}{4} x^2 e^{4x} - \frac{1}{2} \int x e^{4x} dx.$$

К полученному интегралу еще раз применим формулу (1.1):

$$\left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{4x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{4} e^{4x} \end{array} \right|.$$

Имеем:

$$\int x^2 e^{4x} dx = \frac{1}{4} x^2 e^{4x} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} x e^{4x} - \frac{1}{4} \int e^{4x} dx \right) = \frac{1}{4} x^2 e^{4x} - \frac{1}{8} x e^{4x} + \frac{1}{32} e^{4x} + c. \blacksquare$$

III. $\int P_n(x) \ln \alpha x dx$.

Выбор функций: $u = \ln \alpha x$, $dv = P_n(x) dx$. Формула интегрирования по частям применяется 1 раз.

Пример 20. Найти интеграл

$$\int x^5 \ln x dx.$$

Решение.

$$\int x^5 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^5 dx \Rightarrow v = \frac{1}{6} x^6 \end{array} \right| = \frac{x^6}{6} \ln x - \frac{1}{6} \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} \ln x - \frac{1}{36} x^6 + c. \blacksquare$$

IV. $\int P_n(x) \begin{Bmatrix} \arcsin \alpha x \\ \arccos \alpha x \\ \operatorname{arctg} \alpha x \\ \operatorname{arcctg} \alpha x \end{Bmatrix} dx$.

Выбор функций: $u = \begin{Bmatrix} \arcsin \alpha x \\ \arccos \alpha x \\ \operatorname{arctg} \alpha x \\ \operatorname{arcctg} \alpha x \end{Bmatrix}$, $dv = P_n(x) dx$. Формула интегрирования

по частям применяется 1 раз.

Пример 21. Найти интеграл

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{arctg} x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} x^2 \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1 + x^2} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 1) - 1}{x^2 + 1} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) + c. \end{aligned}$$

$$\text{V. } \int \left\{ \begin{array}{l} e^{\alpha x} \\ a^{\alpha x} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{array} \right\} dx$$

Выбор функций u и dv произвольный. Формула интегрирования по частям применяется 2 раза, после чего решается линейное уравнение относительно исходного интеграла.

Пример 22. Найти интеграл

$$\int e^{2x} \cos 3x \, dx.$$

Решение.

$$A = \int e^{2x} \cos 3x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x} dx \\ dv = \cos 3x dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right| = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \int e^{2x} \sin 3x \, dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x} dx \\ dv = \sin 3x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right| = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x \, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \cos 3x - \frac{4}{9} A.$$

Мы получили линейное уравнение относительно исходного интеграла A .

Решаем его:

$$\frac{13}{9} A = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \cos 3x + c;$$

$$A = \frac{3}{13} e^{2x} \sin 3x + \frac{2}{13} e^{2x} \cos 3x + c. \blacksquare$$

Та же самая идея может быть использована и при решении интегралов следующих видов:

$$\int \cos(\ln \alpha x) dx; \int \sin(\ln \alpha x) dx; \int \sqrt{x^2 + a} dx.$$

Заметим, что метод интегрирования по частям применяется не только для интегралов, указанных выше пяти типов.

В некоторых случаях интегрирование по частям удачно сочетается с методом подстановки.

Пример 23. Найти интеграл

$$\int e^{\sqrt{x}} dx.$$

Решение. Вначале выполним подстановку:

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = 2 \int t e^t dt.$$

Теперь используем интегрирование по частям:

$$2 \int t e^t dt = \left| \begin{array}{ll} u = t & \Rightarrow du = dt \\ dv = e^t dt & \Rightarrow v = e^t \end{array} \right| = 2 \left(t e^t - \int e^t dt \right) = 2 t e^t - 2 e^t + c.$$

Остается вернуться к исходной переменной:

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - 2 e^{\sqrt{x}} + c. \blacksquare$$

Пример 24. Найти интеграл

$$\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx.$$

Решение. Здесь, наоборот, сначала выполним интегрирование по частям:

$$\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \frac{\cos x dx}{\sin^3 x} & \Rightarrow v = \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x} \end{array} \right|$$

Для нахождения функции v применим подстановку: $\sin x = t$. Тогда $\cos x dx = dt$ и, значит,

$$v = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{2 \sin^2 x}.$$

Теперь можно продолжить интегрирование по частям:

$$\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx = -\frac{x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{x}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x + c. \blacksquare$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям:

1) $\int x \sin 8x dx;$

2) $\int x \cos 6x dx;$

3) $\int (2x+1)e^{4x} dx;$

4) $\int (3x-2)5^x dx;$

5) $\int \ln x dx;$

6) $\int x \ln 2x dx;$

7) $\int (x^2 + 2x) \cos x dx;$

8) $\int (x^2 + 1) \sin 4x dx;$

9) $\int \arcsin x dx;$

10) $\int \operatorname{arctg} x dx;$

11) $\int x \operatorname{arctg} 2x dx;$

12) $\int x \operatorname{arctg} 5x dx;$

13) $\int x \cos^2 x dx;$

14) $\int x \sin^2 3x dx;$

15) $\int e^x \sin 5x dx;$

16) $\int 4^x \cos 2x dx;$

17) $\int e^{\sqrt{x-1}} dx;$

18) $\int x^3 e^{4x^2} dx;$

19) $\int x^3 \cos(x^2) dx;$

20) $\int x^3 \sin(x^2) dx;$

21) $\int 5^{\operatorname{ctg} x} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx;$

22) $\int \frac{\sin x e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^3 x} dx;$

23) $\int x \ln(x^2 + 1) dx;$

24) $\int \ln(\sqrt{x} + 1) dx;$

$$25) \int e^{2x} \cos(5e^x + 1) dx;$$

$$26) \int e^{2x} \sin(3e^x + 4) dx.$$

1.5. Интегралы, содержащие квадратный трехчлен в знаменателе

Здесь мы изучим интегралы следующего вида:

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}};$$

$$\int \frac{(Mx + N)dx}{ax^2 + bx + c}; \quad \int \frac{(Mx + N)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Для нахождения таких интегралов используются две идеи: выделение полного квадрата и метод подстановки. Покажем на примерах, как это происходит.

Пример 25. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 11}.$$

Решение. Выписываем квадратный трехчлен и выделяем из него полный квадрат:

$$x^2 + 4x + 11 = (x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 4) - 4 + 11 = (x + 2)^2 + 7.$$

Имеем далее:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 11} &= \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 7} = \left| \begin{array}{l} x + 2 = t \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + 7} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{7}} + c = \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{\sqrt{7}} + c. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 26. Найти интеграл

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 - 6x + 3} dx.$$

Решение. Выписываем квадратный трехчлен и выделяем из него полный квадрат:

$$x^2 - 6x + 3 = (x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 9) - 9 + 3 = (x - 3)^2 - 6.$$

Имеем далее:

$$\begin{aligned} \int \frac{(2x+1)dx}{x^2-6x+3} &= \int \frac{(2x+1)dx}{(x-3)^2-6} = \left| \begin{array}{l} x-3=t \\ dx=dt \\ x=t+3 \end{array} \right| = \int \frac{2(t+3)+1}{t^2-6} dt = \int \frac{2t+7}{t^2-6} dt = \\ &= \int \frac{2t}{t^2-6} dt + 7 \int \frac{1}{t^2-6} dt = \left| \begin{array}{l} t^2-6=z \\ 2tdt=dz \end{array} \right| = \int \frac{dz}{z} + 7 \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{6}}{t+\sqrt{6}} \right| = \\ &= \ln|z| + 7 \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{6}}{t+\sqrt{6}} \right| + c = \ln|(x-3)^2-6| + 7 \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x-3-\sqrt{6}}{x-3+\sqrt{6}} \right| + c. \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 27. Найти интеграл

$$\int \frac{5x-2}{\sqrt{4x^2+12x+1}} dx.$$

Решение. Выделяем полный квадрат выражения, стоящего под корнем:

$$4x^2 + 12x + 1 = 4 \left(x^2 + 3x + \frac{1}{4} \right) = 4 \left(\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} \right) - \frac{9}{4} + \frac{1}{4} \right) = 4 \left(\left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - 2 \right).$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-2}{\sqrt{4x^2+12x+1}} dx &= \int \frac{5x-2}{\sqrt{4 \left(\left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - 2 \right)}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{5x-2}{\sqrt{\left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - 2}} dx = \left| \begin{array}{l} x + \frac{3}{2} = t \\ dx = dt \\ x = t - \frac{3}{2} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{5 \left(t - \frac{3}{2} \right) - 2}{\sqrt{t^2 - 2}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{5t - \frac{19}{2}}{\sqrt{t^2 - 2}} dt = \frac{5}{2} \int \frac{t}{\sqrt{t^2 - 2}} dt - \frac{19}{4} \int \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2}} dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} t^2 - 2 = z \\ 2tdt = dz \\ tdt = \frac{dz}{2} \end{array} \right| = \frac{5}{4} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} - \frac{19}{4} \ln |t + \sqrt{t^2 - 2}| = \frac{5}{2} \sqrt{z} - \frac{19}{4} \ln |t + \sqrt{t^2 - 2}| + c = \end{aligned}$$

$$= \frac{5}{2} \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 2} - \frac{19}{4} \ln \left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 2} \right| + c. \blacksquare$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5};$

2) $\int \frac{dx}{x^2 + 8x - 1};$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + x + 2}};$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 3x - 2x^2}};$

5) $\int \frac{(2x - 5)dx}{x^2 + 7x + 3};$

6) $\int \frac{(7x - 2)dx}{x^2 - 3x + 1};$

7) $\int \frac{(4x + 1)dx}{3 - 2x - 5x^2};$

8) $\int \frac{(1 - 5x)dx}{4x^2 + 2x + 3};$

9) $\int \frac{(5x - 3)dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 6}};$

10) $\int \frac{(7x + 4)dx}{\sqrt{1 - 5x - x^2}};$

11) $\int \frac{(2x + 5)dx}{\sqrt{4x - x^2}};$

12) $\int \frac{(6x + 1)dx}{\sqrt{9x^2 + x + 2}}.$

1.6. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется отношение двух многочленов:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}.$$

Рациональная дробь называется **правильной**, если степень многочлена в числителе строго меньше степени многочлена в знаменателе, т.е. $n < m$. В противном случае дробь называется **неправильной**. Так, например, дробь $f_1(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 + 3}$ — правильная, а дроби $f_2(x) = \frac{4x^3 + 2x + 1}{x^3 + 2}$ и $f_3(x) = \frac{5x^4 + 2}{3x^3 + x - 7}$ — неправильные.

Известно, что *всякая неправильная рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.*

Получить такое представление можно с помощью обычного деления многочлена на многочлен «уголком».

Пример 28. Представить неправильную дробь

$$f(x) = \frac{5x^4 - 6x^3 + 2x + 4}{x^2 + 5}$$

в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Решение. Произведем деление:

$$\begin{array}{r|l}
 5x^4 - 6x^3 + 2x + 4 & x^2 + 5 \\
 \underline{5x^4 + 25x^2} & 5x^2 - 6x - 25 \\
 -6x^3 - 25x^2 + 2x + 4 & \\
 \underline{-6x^3 - 30x} & \\
 -25x^2 + 32x + 4 & \\
 \underline{-25x^2 - 125} & \\
 \hline
 32x + 129 &
 \end{array}$$

Результат этого деления означает, что

$$f(x) = 5x^2 - 6x - 25 + \frac{32x + 129}{x^2 + 5}. \blacksquare$$

С точки зрения интегрирования многочлены не представляет никаких проблем и поэтому остается разобраться с правильными рациональными дробями.

Идея интегрирования таких дробей состоит в том, чтобы представить правильную дробь в виде суммы так называемых простейших (интегралы от которых мы уже умеем находить) и воспользоваться свойствами линейности интегралов.

Простейшими называют рациональные дроби следующих типов:

$$1 \text{ тип: } \frac{A}{x-a};$$

$$2 \text{ тип: } \frac{A}{(x-a)^k}, k = 2, 3, \dots;$$

$$3 \text{ тип: } \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}, \text{ где } D = b^2 - 4ac < 0.$$

Интегралы от простейших дробей 1-го и 2-го типов вычисляются следующим образом:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + c;$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c, \quad k = 2, 3, \dots$$

Интегралы 3-го типа изучены нами в пункте 1.5.

Для представления правильной рациональной дроби $f(x)$ в виде суммы простейших следует ее знаменатель $Q_m(x)$ разложить на простейшие множители (линейные и квадратичные с отрицательными дискриминантами; при этом некоторые из линейных множителей могут быть одинаковыми) и воспользоваться следующими правилами:

1) каждому линейному множителю $(x-a)$ ставить в представлении $f(x)$

$$\text{слагаемое } \frac{A}{x-a};$$

2) каждому множителю вида $(x-a)^k, k = 2, 3, \dots$ ставить в представлении

$$f(x) \text{ } k \text{ слагаемых: } \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k};$$

3) каждому множителю вида ax^2+bx+c ($D < 0$) ставить в представлении

$$f(x) \text{ слагаемое } \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}.$$

Числа $A, B, A_1, A_2, \dots, A_k$ являются неопределенными коэффициентами. Методы нахождения этих коэффициентов будут изложены в дальнейшем. Сейчас же мы приведем несколько примеров, показывающих вид самого представления с неопределенными пока коэффициентами.

Пример 29. Представить дробь

$$f(x) = \frac{3x+2}{x^3-x}.$$

в виде суммы простейших.

Решение. Вначале разложим знаменатель на простейшие множители:

$$f(x) = \frac{3x+2}{x^3-x} = \frac{3x+2}{x(x^2-1)} = \frac{3x+2}{x(x-1)(x+1)}.$$

Опираясь на сформулированные правила, получим

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}. \blacksquare$$

Пример 30. Представить дробь

$$f(x) = \frac{2x^2-1}{(x-2)(x+1)^2}$$

в виде суммы простейших.

Решение. В отличие от предыдущего примера здесь знаменатель уже разложен на простейшие множители. С учетом правил, имеем

$$f(x) = \frac{2x^2-1}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}. \blacksquare$$

Пример 31. Представить дробь

$$f(x) = \frac{x^2+5}{x^3+2x^2+4x}$$

в виде суммы простейших.

Решение. $f(x) = \frac{x^2+5}{x(x^2+2x+4)}$. Дальнейшее разложение знаменателя невозможно, т.к. квадратный трехчлен x^2+2x+4 имеет отрицательный дискриминант. Применим правила:

$$f(x) = \frac{x^2+5}{x(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}. \blacksquare$$

Обращаем Ваше внимание на то, что вид разложения целиком зависит от знаменателя правильной дроби $Q_m(x)$. Числитель $P_n(x)$ влияет только на нахождение неопределенных пока коэффициентов.

Пример 32. Найти интеграл

$$\int \frac{3x+2}{x^3-x} dx.$$

Решение. Воспользуемся разложением, полученным в примере 29:

$$f(x) = \frac{3x+2}{x^3-x} = \frac{3x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов приведем правую часть последнего равенства к общему знаменателю:

$$f(x) = \frac{A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}.$$

Знаменатель полученной дроби совпадает со знаменателем исходной и поскольку дроби равны между собой, то у них обязаны совпадать и числители:

$$A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1) = 3x+2.$$

Данное тождественное равенство позволяет найти все коэффициенты, полагая x равными 0, 1 и -1 :

$$x=0 \Rightarrow -A=2 \Rightarrow A=-2;$$

$$x=1 \Rightarrow 2B=5 \Rightarrow B=\frac{5}{2};$$

$$x=-1 \Rightarrow 2C=-1 \Rightarrow C=-\frac{1}{2}.$$

Итак, искомое разложение примет вид:

$$f(x) = -\frac{2}{x} + \frac{5}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}.$$

Теперь находим интеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+2}{x^3-x} dx &= \int \left(-\frac{2}{x} + \frac{5}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} \right) dx = -2 \int \frac{dx}{x} + \frac{5}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} = \\ &= -2 \ln|x| + \frac{5}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c. \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 33. Найти интеграл

$$\int \frac{2x^2 - 1}{(x-2)(x+1)^2} dx.$$

Решение. Найдем коэффициенты A , B_1 и B_2 из разложения, полученного в примере 30. После приведения правой части к общему знаменателю имеем:

$$A(x+1)^2 + B_1(x-2)(x+1) + B_2(x-2) = 2x^2 - 1$$

$$x = -1 \Rightarrow -3B_2 = 1 \Rightarrow B_2 = -\frac{1}{3};$$

К сожалению, $x = 2 \Rightarrow 9A = 7 \Rightarrow A = \frac{7}{9}$. получить B_1 таким способом не представляется возможным. Применим еще один стандартный прием. Хорошо известно, что два многочлена совпадают, если равны коэффициенты при одинаковых степенях. Чтобы найти B_1 приравняем коэффициенты при x^2 :

$$x^2 \mid A + B_1 = 2 \Rightarrow B_1 = \frac{11}{9}.$$

Таким образом, искомое разложение выглядит так:

$$f(x) = \frac{7}{9(x-2)} + \frac{11}{9(x+1)} - \frac{1}{3(x+1)^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 1}{(x-2)(x+1)^2} dx &= \frac{7}{9} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{11}{9} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{7}{9} \ln|x-2| + \frac{11}{9} \ln|x+1| + \frac{1}{3} (x+1)^{-1} + c. \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 34. Найти интеграл

$$\int \frac{x^2 + 5}{x^2 + 2x^2 + 4x} dx.$$

Решение. Вид разложения подынтегрального выражения получен в примере 31:

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 4},$$

откуда

$$A(x^2 + 2x + 4) + (Bx + C)x = x^2 + 5.$$

Применим обе идеи, изложенные в предыдущих примерах:

$$\begin{array}{lcl}
 x=0 & \Rightarrow & 4A=5 \Rightarrow A=\frac{5}{4}; \\
 x^2 & | & A+B=1 \Rightarrow B=-\frac{1}{4}; \\
 x^1 & | & 2A+C=0 \Rightarrow C=-\frac{5}{2}.
 \end{array}$$

Тогда

$$f(x) = \frac{5}{4x} + \frac{-\frac{1}{4}x - \frac{5}{2}}{x^2 + 2x + 4}.$$

Возвращаемся к вычислению интеграла:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2 + 5}{x^2 + 2x^2 + 4x} dx &= \frac{5}{4} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{4} \int \frac{x+10}{x^2 + 2x + 4} dx = \\
 &= \frac{5}{4} \ln|x| - \frac{1}{8} \ln|x^2 + 2x + 4| - \frac{3\sqrt{3}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + c.
 \end{aligned}$$

Правильность нахождения последнего интеграла проверьте самостоятельно. ■

Пример 35. Найти интеграл

$$\int \frac{5x^4 - 6x^3 + 2x + 4}{x^2 + 5} dx.$$

Решение. В данном случае предстоит проинтегрировать неправильную рациональную дробь. Поэтому вначале мы должны представить ее в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Искомое представление получено в примере 28:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{5x^4 - 6x^3 + 2x + 4}{x^2 + 5} dx &= \int \left(5x^2 - 6x - 25 + \frac{32x + 129}{x^2 + 5} \right) dx = 5 \frac{x^3}{3} - 6 \cdot \frac{x^2}{2} - 25x + \\
 &+ 32 \int \frac{x dx}{x^2 + 5} + 129 \int \frac{dx}{x^2 + 5} = 5 \frac{x^3}{3} - 3x^2 - 25x + 16 \ln|x^2 + 5| + \frac{129}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + c.
 \end{aligned}$$

■

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Найти интегралы от рациональных дробей.

1) $\int \frac{5x+1}{x^3-4x} dx;$

2) $\int \frac{7x+2}{x^3-9x} dx;$

3) $\int \frac{x-2}{x^3+x^2} dx;$

4) $\int \frac{3x+2}{x^3-x^2} dx;$

5) $\int \frac{dx}{x^3+8};$

6) $\int \frac{dx}{x^3-1};$

7) $\int \frac{x^5-3x+1}{x^2+4} dx;$

8) $\int \frac{2x^4+3x^2+2}{x^2+7} dx;$

9) $\int \frac{4x+5}{x^4-1} dx;$

10) $\int \frac{3x+1}{x^4-16} dx;$

11) $\int \frac{x^2+3}{x^3+2x^2+5x} dx;$

12) $\int \frac{x-3}{x^3+x^2+3x} dx;$

13) $\int \frac{x^4+3}{x^3+x} dx;$

14) $\int \frac{x^4-7}{x^3+3x} dx;$

15) $\int \frac{x+5}{x^4+x^2} dx;$

16) $\int \frac{x+2}{x^4-4x^2} dx.$

§2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Конструкция определенного интеграла и его свойства

Пусть $f(x)$ — функция, определенная на отрезке $[a, b]$ (рис. 23). Рассмотрим следующую конструкцию.

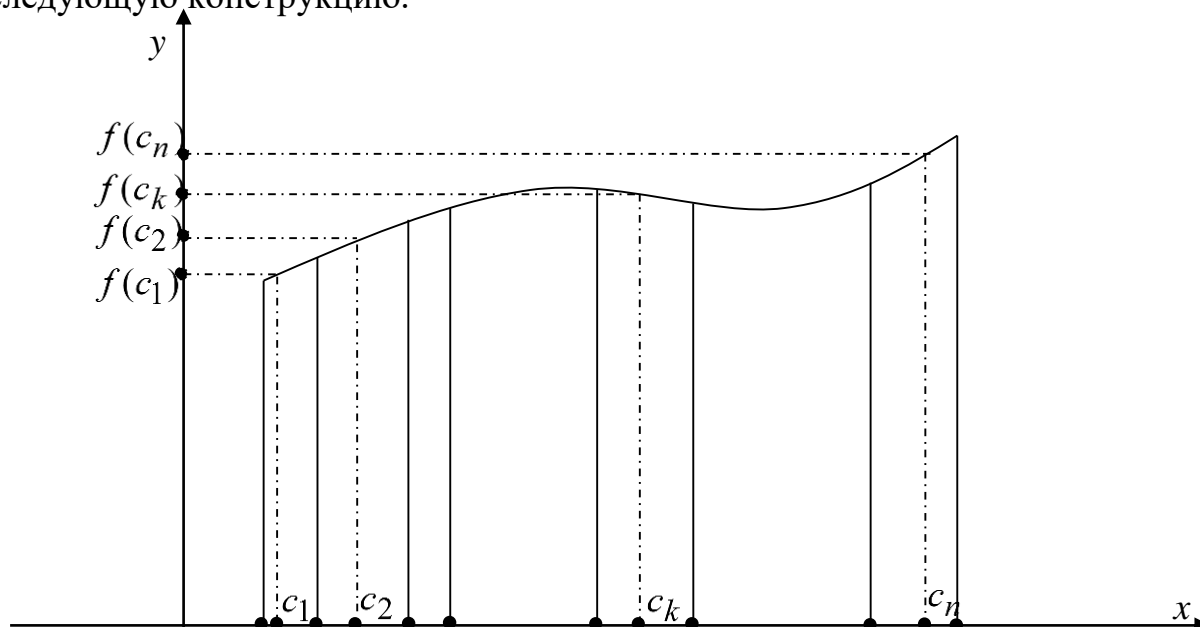


Рис. 23

1 шаг. Отрезок $[a, b]$ разобьем произвольно на большое количество n частей-ячеек $\omega_k = [x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, \dots, n$, $x_0 = a$, $x_n = b$. Обозначим через

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ длину интервала ω_k и пусть $\lambda_n = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$.

2 шаг. В каждой ячейке выберем произвольно по одной точке $c_k \in \omega_k$; вычислим значения функции f в этих точках и умножим каждое из них на длину соответствующего интервала

$$f(c_k) \cdot \Delta x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

3 шаг. Составим формально суммы

$$\sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k \quad (2.1)$$

Эти суммы при различных n называются **интегральными**.

4 шаг. Будем искать предел

$$\lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k. \quad (2.2)$$

Определение. Если указанный предел существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части, ни от выбора точек c_k , то он называется **определенным интегралом** от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обо-

значается символом $\int_a^b f(x) dx$.

Таким образом,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k. \quad (2.3)$$

Справедлива следующая **теорема**: если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ существует.

Изложенная конструкция возникает при решении многих задач науки, экономики и инженерного дела. Определенный интеграл позволяет вычислять площади плоских фигур, объемы и поверхности тел вращения, координаты центров тяжести и моменты инерции материальных дуг. С помощью определенного интеграла находят силу взаимного притяжения некоторых объектов, работу по выкачиванию жидкости из резервуара, давление воды на плотину, кинетическую энергию вращающихся тел и многое, многое другое.

Самый простой и в тоже время важный результат состоит в следующем: если $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, то определенный интеграл выражает площадь криволинейной трапеции, изображенной на рис. 24, т.е.

$$S_{\text{криволинейной трапеции}} = \int_a^b f(x)dx. \quad (2.4)$$

Ниже мы представляем свойства определенного интеграла, сопровождая большую часть рисунками, иллюстрирующими содержание этих свойств.

$$1. \int_a^b dx = b - a.$$

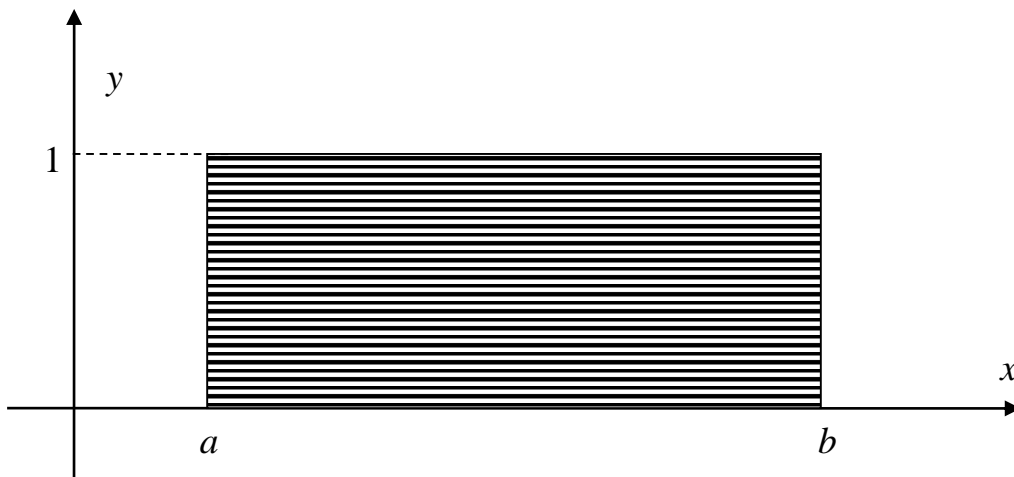


Рис. 24

2. *Линейность*. Для любых двух непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ и любых чисел α и β справедливо равенство

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

3. *Аддитивность*. Если отрезок $[a, b]$ разбит на два отрезка $[a, c]$ и $[c, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(Площадь всей криволинейной трапеции равна сумме площадей двух ее частей, рис. 25).

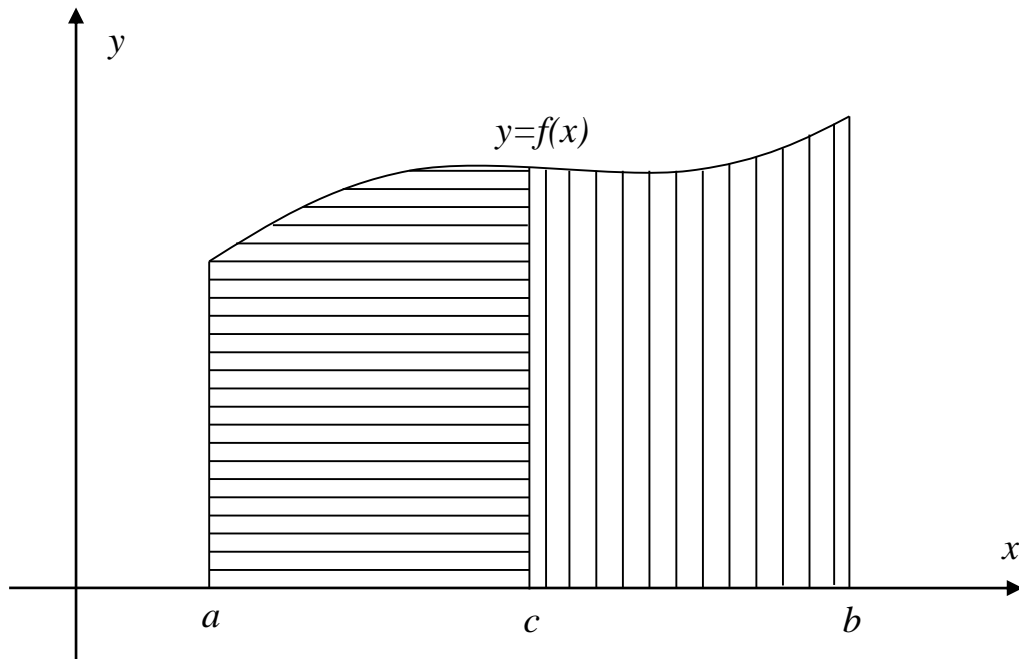


Рис. 25

4. *Позитивность*. Если $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

5. *Монотонность*. Если $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

(Площадь под кривой $f(x)$ больше площади под кривой $g(x)$, рис. 26).

Следствие. Из рис. 4. видно, что площадь фигуры, ограниченной слева и справа соответственно прямыми $x = a$, $x = b$, снизу графиком функции $y = g(x)$, а сверху – графиком функции $y = f(x)$ определяется формулой

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

или

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx. \quad (2.5)$$

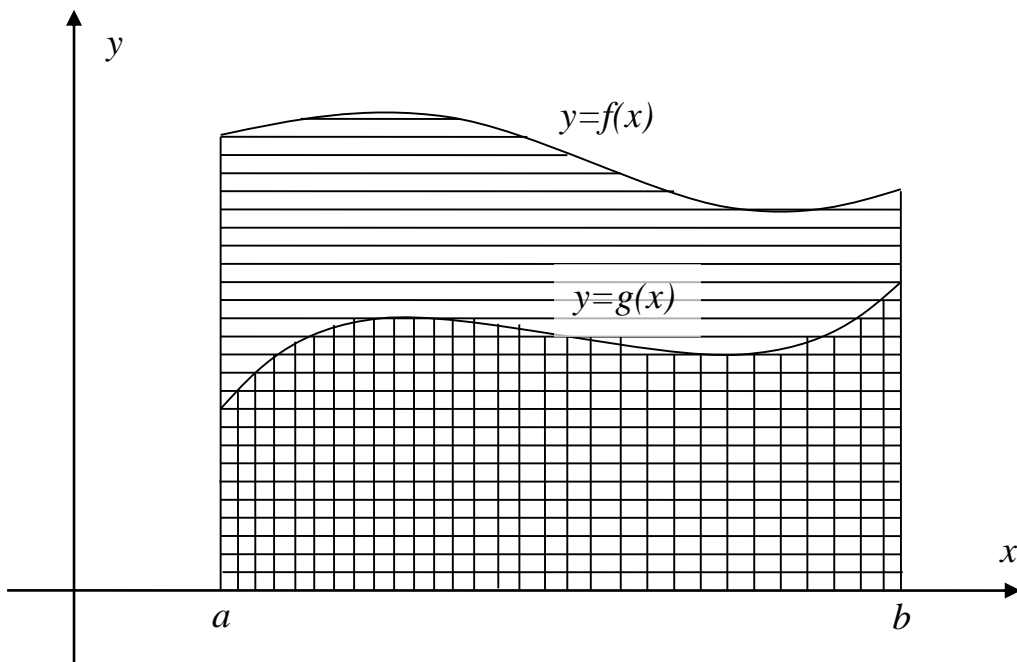


Рис. 26

6. Если $m \leq f(x) \leq M$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

(Площадь под кривой $f(x)$ заключена между площадями прямоугольников с тем же основанием и высотами соответственно равными m и M , рис. 27).

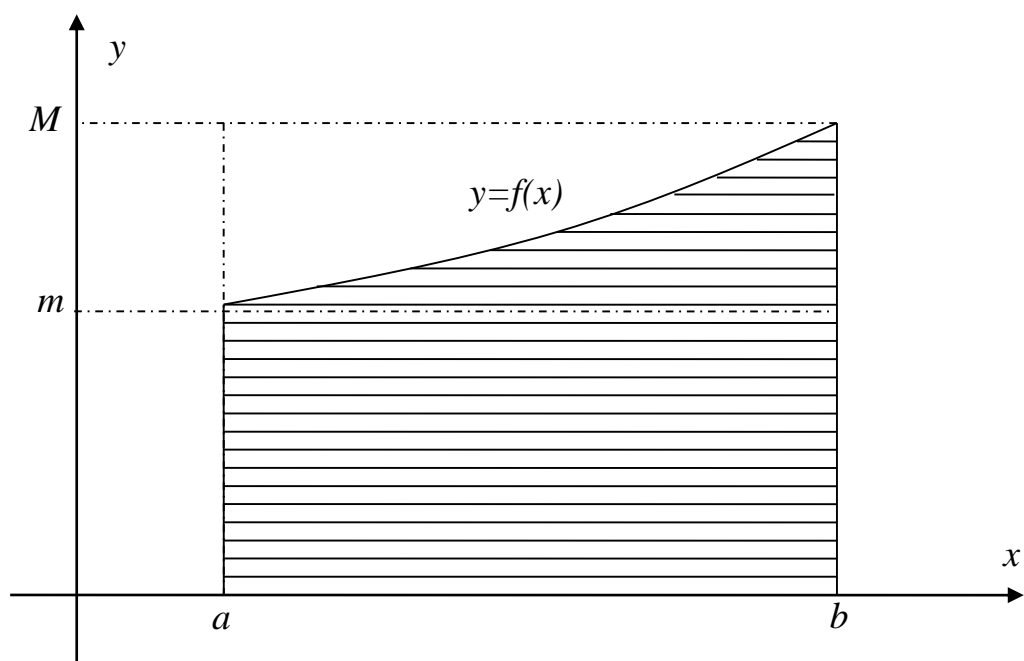


Рис. 27

7. *Теорема о среднем значении.* Если $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, то существует точка $c \in [a, b]$, такая, что

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a),$$

(т.е. существует прямоугольник с тем же основанием $[a, b]$, площадь которого равна площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$, рис. 28).

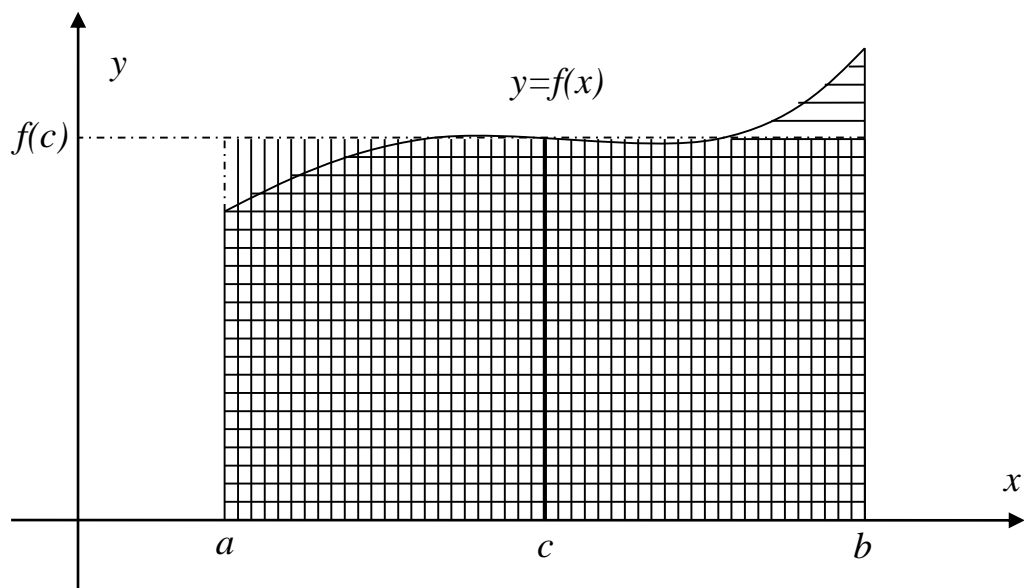


Рис. 28

8. Справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2.2. Вычисление определенного интеграла

Теорема. Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Это формула Ньютона-Лейбница.

Замечание. При решении конкретных примеров на вычисление интегралов тяжело одновременно и находить первообразную и вычислять ее значение на нижнем и верхнем пределах. В связи с этим используется промежуточная форма записи формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b,$$

означающая, что первообразная функция $F(x)$ уже найдена, но пределы интегрирования еще не подставлены.

Пример 36. Вычислить интеграл

$$J = \int_1^2 (x^4 - 2x)dx.$$

Решение.

$$\int_1^2 (x^4 - 2x)dx = \left(\frac{x^5}{5} - x^2 \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{32}{5} - 4 \right) - \left(\frac{1}{5} - 1 \right) = \frac{16}{5}. \blacksquare$$

Пример 37. Вычислить интеграл

$$J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x)dx.$$

Решение.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx = \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi \right) - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \blacksquare$$

Пример 38. Вычислить интеграл

$$J = \int_1^e \frac{x-1}{x} dx.$$

Решение.

$$\int_1^e \frac{x-1}{x} dx = \int_1^e \left(1 - \frac{1}{x} \right) dx = \left(x - \ln |x| \right) \bigg|_1^e = (e - \ln e) - (1 - \ln 1) = e - 2. \blacksquare$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле проводится по формуле

$$\int_a^b u dv = uv \bigg|_a^b - \int_a^b v du,$$

где u и v – функции, непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$.

Пример 39. Вычислить интеграл

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx.$$

Решение.

$$\begin{aligned} J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx & \Rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = \\ &= x \sin x \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - 0 + \cos x \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1. \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 40. Вычислить интеграл

$$J = \int_1^e \ln x \, dx.$$

Решение.

$$J = \int_1^e \ln x \, dx = \left. \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right| = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e \ln e - 1 \cdot \ln 1 - x \Big|_1^e = 1.$$

■

Замена переменных в определенном интеграле должна сопровождаться расчетом новых пределов интегрирования. При этом не нужно возвращаться к исходной переменной.

Пример 41. Вычислить интеграл

$$J = \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx.$$

Решение. Чтобы избавиться от иррациональности сделаем замену переменной $1+x=t^2$. Тогда

$$x=t^2-1, \, dx=2t \, dt.$$

Для нахождения пределов интегрирования по переменной t , выразим t через x : $t = \sqrt{x+1}$. Подставляя нижний и верхний пределы переменной x , получим нижний и верхний пределы переменной t :

$$\begin{array}{ll} \text{при } x=3 & t = \sqrt{1+3} = 2, \\ \text{при } x=8 & t = \sqrt{1+8} = 3. \end{array}$$

Выполняя подстановку, имеем:

$$J = \int_2^3 \frac{(t^2-1)2t \, dt}{t} = 2 \int_2^3 (t^2-1) dt = 2 \left(\left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_2^3 \right) = 2 \left((9-3) - \left(\frac{8}{3} - 2 \right) \right) = \frac{32}{3}. \blacksquare$$

Пример 42. Вычислить интеграл

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x dx.$$

Решение. $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \sin^2 x) \cos x dx.$

Производим замену $\sin x = t$. Тогда

$$\cos x dx = dt, \quad x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Получим:

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - t^2) dt = \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} = \frac{11}{24}. \blacksquare$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вычислить определенные интегралы:

1) $\int_0^1 (x^2 - 3x + 4) dx;$

2) $\int_1^2 (x^2 + 5x - 1) dx;$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx;$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2x dx;$

5) $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 1};$

6) $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{x^3 + 2};$

7) $\int_0^{\pi} x \sin \frac{x}{2} dx;$

8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx;$

9) $\int_0^4 \frac{x dx}{\sqrt{9 + x^2}};$

10) $\int_0^2 e^{x^2} x dx;$

11) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} dx;$

12) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x + 1} dx;$

$$13) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx;$$

$$15) \int_1^e \ln^2 x dx;$$

$$17) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{xdx}{\sin^2 x};$$

$$19) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + 2\cos x};$$

$$21) \int_0^{\pi} e^x \cos x dx;$$

$$14) \int_0^{\pi} \cos^4 x dx;$$

$$16) \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx;$$

$$18) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x};$$

$$20) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \sin^2 x};$$

$$22) \int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$$

2.3. Приложение определенного интеграла

2.3.1. Вычисление площадей

Подсчет площадей будем производить по формулам (2.4) и (2.5).

Пример 43. Найти площадь, ограниченную одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и осью OX (рис. 29).

Решение. Применим формулу (2.4):

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2. \blacksquare$$

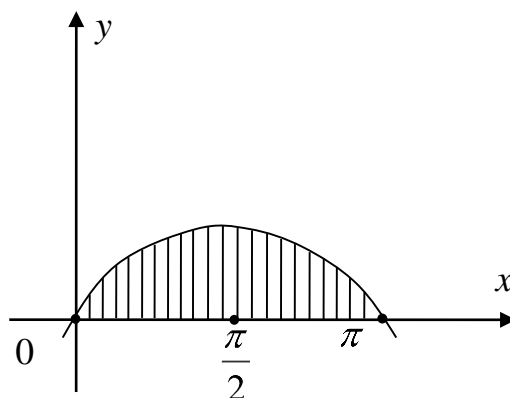


Рис. 29

Пример 44. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{4}{x} + 1$,

$y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$ (рис. 30).

Решение. Согласно формуле (2.5) имеем:

$$S = \int_1^4 \left(\frac{4}{x} + 1 - \sqrt{x} \right) dx = \left(4 \ln |x| + x - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \Big|_1^4 = \left(4 \ln 4 + 4 - \frac{16}{3} \right) - \left(1 - \frac{2}{3} \right) = 4 \ln 4 - \frac{5}{3}.$$

■

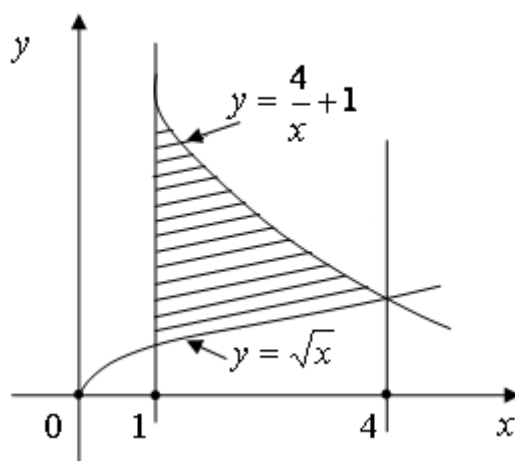


Рис. 30

2.3.2. Объем тела вращения

Объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной отрезком $[a, b]$ оси OX , прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$ (рис. 31), вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (2.6)$$

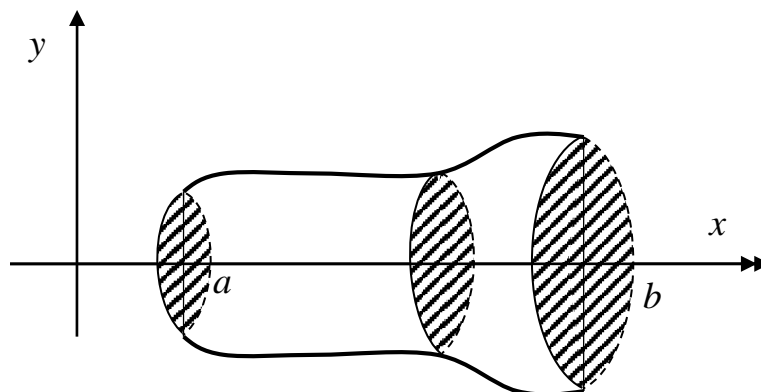


Рис. 31

Пример 45. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и этой осью (рис. 32).

Решение. Воспользовавшись формулой (2.6), получаем:

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}. \blacksquare$$

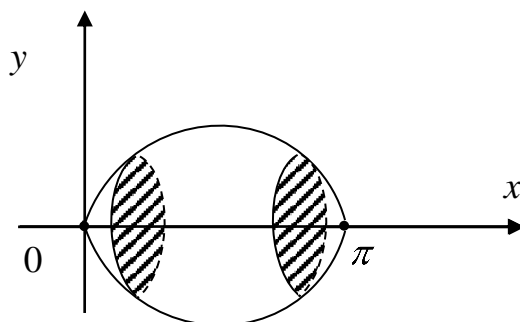


Рис. 32

Пример 46. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2, \quad y = \sqrt{2-x}, \quad x = 0.$$

Решение. На рис. 33 можно видеть, что искомый V представляет собой сумму двух объемов:

$$V = \pi \int_0^1 x^4 dx + \pi \int_1^2 (2-x) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} \Big|_0^1 \right) + \pi \left(\left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 \right) = \frac{7\pi}{10}. \blacksquare$$

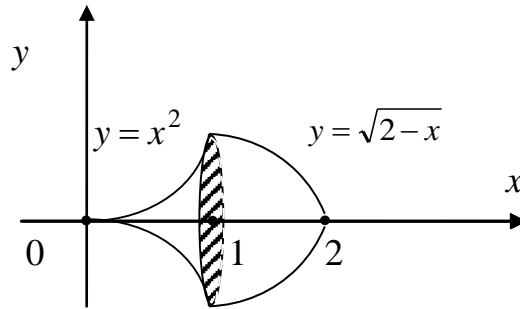


Рис. 33

Пример 47. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - \frac{x^2}{4}$, $y = \frac{x^2}{4}$, $x = 0$ ($x \geq 0$) (рис. 34).

Решение. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} y = 2 - \frac{x^2}{4} \\ y = \frac{x^2}{4} \end{cases}$$

находим абсциссы точек пересечения парабол: $x = 0$, $x = 2$. Теперь ясно, что искомый объем получится вычитанием из объема тела вращения криволинейной

трапеции $y = 2 - \frac{x^2}{4}$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ объема тела вращения криволиней-

ной трапеции $y = \frac{x^2}{4}$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.

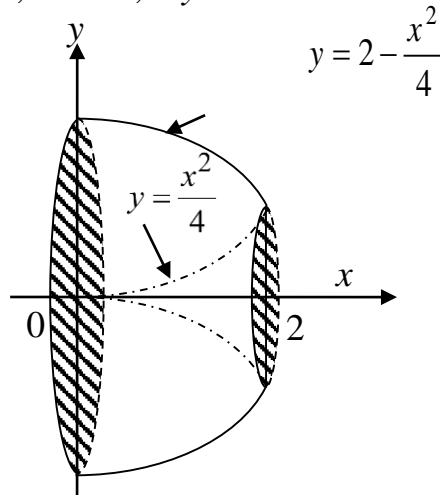


Рис. 34

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^2 \left(2 - \frac{x^2}{4}\right)^2 dx - \pi \int_0^2 \frac{x^4}{16} dx = \pi \int_0^2 \left(4 - x^2 + \frac{x^4}{16} - \frac{x^4}{16}\right) dx = \pi \int_0^2 (4 - x^2) dx = \\
 &= \pi \left(4x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{3}. \blacksquare
 \end{aligned}$$

2.3.3. Длина дуги плоской кривой

Плоская кривая $y = f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$ вещественной оси, называется *гладкой*, если производная $f'(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Длина дуги гладкой кривой $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, определяется формулой

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (2.7)$$

Пример 48. Найти длину дуги кривой $y = 3\ln(x^2 - 9)$ от точки с абсциссой $x = 4$ до точки с абсциссой $x = 5$.

Решение. Подготовим $\sqrt{1 + (y')^2}$:

$$\begin{aligned}
 y' &= 3 \cdot \frac{1}{x^2 - 9} \cdot 2x = \frac{6x}{x^2 - 9}, \\
 \sqrt{1 + (y')^2} &= \sqrt{1 + \frac{36x^2}{(x^2 - 9)^2}} = \sqrt{\frac{x^4 - 18x^2 + 81 + 36x^2}{(x^2 - 9)^2}} = \\
 &= \sqrt{\frac{x^4 + 18x^2 + 81}{(x^2 - 9)^2}} = \sqrt{\frac{(x^2 + 9)^2}{(x^2 - 9)^2}} = \frac{x^2 + 9}{x^2 - 9}.
 \end{aligned}$$

Длину дуги теперь вычисляем по формуле (2.7):

$$L = \int_4^5 \frac{x^2 + 9}{x^2 - 9} dx = \int_4^5 \frac{(x^2 - 9) + 18}{x^2 - 9} dx = \int_4^5 \left(1 + 18 \cdot \frac{1}{x^2 - 9}\right) dx =$$

$$= \left(x + 3 \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| \right) \Big|_4^5 = \left(5 + 3 \ln \frac{1}{4} \right) - \left(4 + 3 \ln \frac{1}{7} \right) = 1 + 3 \ln \frac{7}{4}. \blacksquare$$

2.3.4. Площадь поверхности тела вращения

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси абсцисс дуги гладкой кривой $y = f(x)$ от точки с абсциссой $x = a$ до точки с абсциссой $x = b$, вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (2.8)$$

Пример 49. Найти площадь поверхности тела, полученного вращением вокруг оси OX дуги кривой $y = \frac{5}{2} \left(e^{\frac{x}{5}} + e^{-\frac{x}{5}} \right)$ от $x = 0$ до $x = 5$.

Решение. Подготовим $\sqrt{1 + (y')^2}$:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{5}{2} \left(\frac{1}{5} e^{\frac{x}{5}} - \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}} \right) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{5}} - e^{-\frac{x}{5}} \right), \\ \sqrt{1 + (y')^2} &= \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(e^{\frac{2x}{5}} - 2 + e^{-\frac{2x}{5}} \right)} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(e^{\frac{2x}{5}} + 2 + e^{-\frac{2x}{5}} \right)} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(e^{\frac{x}{5}} + e^{-\frac{x}{5}} \right)^2} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{5}} + e^{-\frac{x}{5}} \right). \end{aligned}$$

Вычисляем площадь поверхности тела вращения, используя формулу (2.8):

$$S = 2\pi \int_0^5 \frac{5}{2} \left(e^{\frac{x}{5}} + e^{-\frac{x}{5}} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{5}} + e^{-\frac{x}{5}} \right) dx = \frac{5\pi}{2} \int_0^5 \left(e^{\frac{2x}{5}} + 2 + e^{-\frac{2x}{5}} \right) dx =$$

$$= \frac{5\pi}{2} \left(\frac{5}{2} e^{\frac{2x}{5}} + 2x - \frac{5}{2} e^{-\frac{2x}{5}} \right) \Big|_0^5 = \frac{5\pi}{2} \left(\frac{5}{2} e^2 + 10 - \frac{5}{2} e^{-2} \right) = \frac{25\pi}{4} (e^2 - e^{-2} + 20)$$

. ■

2.3.5. Вычисление объёма выпускаемой продукции

Пусть функция $f(t)$ описывает изменение производительности некоторого производства на промежутке времени $[0; T]$. Обозначим через U объём продукции, выпущенной за это время.

Справедлива формула:

$$U = \int_0^T f(t) dt, \quad (2.9)$$

т.е. определенный интеграл в пределах от 0 до T от функции производительности труда выражает объём продукции, выпущенной предприятием за промежуток времени $[0; T]$.

Это важное свойство часто называют *экономическим смыслом определённого интеграла*.

Изменение производительности труда описывается *функцией Кобба–Дугласа*:

$$f(t) = a_0 A^\alpha(t) \cdot L^\beta(t) \cdot K^\gamma(t), \quad (2.10)$$

где $A(t)$ – затраты природных ресурсов, $L(t)$ – затраты труда, $K(t)$ – затраты капитала, $a_0, \alpha, \beta, \gamma$ – некоторые числа.

Пример 50. Найти объём продукции, произведённой предприятием за 4 года, если функция Кобба – Дугласа имеет вид

$$f(t) = (1 + t)e^{3t},$$

где t – время в годах.

Решение. По формуле (2.9) имеем:

$$U = \int_0^4 (1 + t)e^{3t} dt.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$U = \frac{1}{3}(1+t)e^{3t} \Big|_0^4 - \frac{1}{3} \int_0^4 e^{3t} dt = \frac{5}{3}e^{12} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}e^{3t} \Big|_0^4 = \frac{5}{3}e^{12} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}e^{12} + \frac{1}{9} \approx 2,53 \cdot 10^5$$

(ед.) ■

Пример 51. Производительность труда растет в течение первых 8 дней от запуска по закону

$$f(t) = e^{\frac{t}{2}} - 1,$$

а затем остаётся постоянной. Найти объём продукции, выпущенной предприятием за 20 рабочих дней.

Решение. По условию функция производительности труда имеет вид:

$$f_*(x) = \begin{cases} e^{\frac{t}{2}} - 1, & t \in [0;8] \\ e^4 - 1, & t \in (8,20]. \end{cases}$$

Теперь находим объём выпущенной продукции по формуле (2.9):

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{20} f_*(t) dt = \int_0^8 \left(e^{\frac{t}{2}} - 1 \right) dt + \int_8^{20} (e^4 - 1) dt = \left(2e^{\frac{t}{2}} - t \right) \Big|_0^8 + (e^4 - 1) t \Big|_8^{20} = \\ &= 2e^4 - 8 - 2 + 12e^4 - 12 = 14e^4 - 22 \approx 742,38 \text{ (ед.)} \blacksquare \end{aligned}$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1) $y = x^2 - 2x + 5, \quad y = x + 5;$

2) $y = x^2, \quad y = 3 - 2x;$

3) $y = \frac{3}{x}, \quad y = -x + 4;$

4) $y = -\frac{2}{x}, \quad y = x - 3;$

5) $y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = 2e;$

6) $y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 1.$

Найти объёмы тел вращения вокруг оси OX фигур, ограниченных линиями:

$$7) y = 2x - x^2, \quad y = 0;$$

$$8) y = x^2, \quad y = 2 - x, \quad y = 0;$$

$$9) y = \frac{4}{x}, \quad x = 1, \quad x = 4, \quad y = 0;$$

$$10) y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt{2 - x}, \quad y = 0$$

$$11) y = 2 - x^2, \quad y = x, \quad x = 0;$$

$$12) y = \sqrt{x}, \quad y = 2, \quad x = 0.$$

Найти длины дуг кривых:

$$13) y = \sqrt{x^3}, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$14) y = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}, \quad 1 \leq x \leq 8;$$

$$15) y = \ln(\sin x), \quad \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2};$$

$$16) y = \ln(x^2 - 1), \quad 2 \leq x \leq 4;$$

$$17) y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$18) y = \frac{5^x + 5^{-x}}{2 \ln x}, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Вычислить площади поверхностей, образованных вращением вокруг оси OX кривых:

$$19) y^2 = 8x, \quad 0 \leq x \leq 6;$$

$$20) y^2 = 4x, \quad 0 \leq x \leq 3;$$

$$21) y = \frac{3}{2} \left(e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}} \right), \quad 0 \leq x \leq 3;$$

$$22) y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Решить задачи с экономическим содержанием.

23) Найти объём выпуска продукции за 4 года, если в функции Кобба – Дугласа $A(t) = e^{2t}$, $L(t) = t + 1$, $K(t) = 10$, $a_0 = \alpha = \beta = \gamma = 1$.

24) Найти объём выпуска продукции за 5 лет, если в функции Кобба – Дугласа $A(t) = e^{4t}$, $L(t) = 2t + 1$, $K(t) = t + 3$, $a_0 = 5$, $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

25) Определить объём выпуска продукции за первые 4 часа работы при производительности $f(t) = 15e^{-0,5t}$, где t – время в часах.

26) Определить объём выпуска продукции за первый рабочий день (8 часов) при производительности $f(t) = 11e^{-0,4t}$, где t – время в часах.

27) При непрерывном производстве химического волокна производительность $f(t)$ растёт с момента запуска в течение 10 часов, а затем остаётся постоянной. Сколько волокон даёт аппарат в первые сутки после запуска, если

$$f(t) = e^{\frac{t}{5}} - 1.$$

28) При непрерывном производстве стали, производительность $f(t)$ растёт с момента запуска в течение 5 дней, а затем остаётся постоянной. Найти

объём производства за месяц (30 дней), если $f(t) = e^{\frac{t}{10}} - 1$.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ОЧНОЙ И ЗАОЧНОЙ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ.

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 1

Задача 1. Найти производные следующих функций:

- 1) $y = ax^b - 2x^{b-a} + 4\sqrt[3]{x} - 7;$
- 2) $y = 5\sin ax + 8\operatorname{tg}(2x + b) + 1;$
- 3) $y = (4x^b + 3\sqrt{x}) \cdot \arcsin(1 - ax);$
- 4) $y = \frac{(1+a)x^2 - bx + 9}{e^{(b-a)x} + 7x};$
- 5) $y = \cos^2(bx - x^3) + \sqrt{ax^4 - 3x + b};$
- 6) $y = e^{\sin(ax+b)} \cdot \ln^{b+3}\left(x + \frac{a}{2}\sqrt{x}\right);$
- 7) $y = \operatorname{arctg}^{a+2}(\cos(3x^{b+1} - 5x^2));$
- 8) $y = \frac{x^4 \ln(2x - a\sqrt{x})}{\sin^3(8x^2 + b)} + \arccos \frac{1}{x} \cdot (x^4 + 7)^{b+5}.$

Задача 2. Найти пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 + 2x^2 - bx + 4}{(a+b)x^3 + 5x^2 - 1};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7} - 3}{x^2 + (b-1)x - b};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + ax + 2}{e^{(b+1)x}};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3((a+1)x)}{x \arcsin^2((b+2)x)};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(a+b+1)x)}{\ln(\cos(a+b+2)x)};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5^x + (a+3)x^2\right)^{\frac{1}{x}}.$

Задача 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 9x^2 + 15x + a$ на отрезке $[-1, b+2]$.

Задача 4. Провести полное исследование функции

$$y = \frac{x^2 + (2b - a)x + (b^2 - ab + 2a)}{x + b - 2}$$

и построить ее график.

Задача 5. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=f(x;y)$

1) $z = 5x^2 - (a+1)y + \sqrt{(b+2)y^2 - 4x}$;

2) $z = x^3 e^{(a^2+1)x+6\sqrt{y}}$;

3) $z = \frac{\sin\left(1 + \frac{x}{y} + ax\right)}{\sqrt{x^2 y - by}}$.

Задача 6. Для функции $z=f(x;y)$ в точке M_0 найти градиент ($\text{grad } z|_{M_0}$) и производную по направлению $\bar{l} \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{l}}|_{M_0} \right)$:

1) $z = 3x + ay^2 + (b+1)xy$, $M_0(1;2)$, $\bar{l} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$;

2) $z = (y^2 + b)\sqrt{(a^2 + 1)x + (4a + 3)y}$, $M_0(1;1)$, $\bar{l} = (8;6)$.

Пояснение Числа a и b выбираются студентом по его зачетной книжке (или студенческому билету):

a – это последняя цифра в “зачетке”,

b – это предпоследняя цифра в “зачетке”.

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №2

Задача 1. Найти неопределенные интегралы:

1. Свойства линейности:

1) $\int \left(3x^a - 4\text{tg } x + \frac{5}{x^{b+1}} \right) dx$;

2) $\int \cos^2(b+3)x \, dx$;

3) $\int \sin(a+1)x \cdot \sin(a+5)x \, dx$;

4) $\int \frac{((a+2)x-1)^2}{x^3} dx$.

2. Метод подстановки:

1) $\int (x^2 + 3)^{b+1} x dx$;

2) $\int \cos^{a+4} x \sin x dx$;

3) $\int \frac{dx}{x(\ln x)^{b+3}}$;

4) $\int \frac{dx}{(\text{tg}^2 x + b - 5)\cos^2 x}$;

$$5) \int \frac{x^{a+1}}{x^{2a+4} - 16} dx;$$

$$6) \int \frac{(a+2)^x dx}{\sqrt{1 - (a+2)^{2x}}}.$$

3. Интегрирование по частям:

$$1) \int (x+b)e^{(a+1)x} dx; \quad 2) \int x^{b+2} \ln x dx; \quad 3) \int x^2 \sin(a+3)x dx.$$

4. Рациональные дроби:

$$1) \int \frac{(a+5)x-1}{x^2+4x+b} dx;$$

$$2) \int \frac{(b+1)x^2+a+2}{x^3-1} dx;$$

Задача 2. Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_0^1 (x^2 - (b+1)x + a) dx;$$

$$2) \int_{a+1}^{a+5} \sqrt{x-a-1} dx;$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{2a+4}} x \cos(a+2)x dx;$$

$$4) \int_1^2 \frac{x dx}{x^2 + b + 1}.$$

Задача 3. Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями:

$$1) y = x^2 + a, \quad y = x + a + 2;$$

$$2) y = \frac{b+1}{x}, \quad y = -x + b + 2.$$

Задача 4. Найдем объём тела вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = a + 1$.

Задача 5. Производительность труда в условиях некоторого производства растёт в течение первых $b + 2$ дней от запуска по закону $f(t) = e^{\frac{t}{2}} - 1$, а затем остаётся постоянной. Найти объём продукции, выпущенной предприятием за первый месяц (21 рабочий день).

Пояснение Числа a и b выбираются студентом по его зачетной книжке (или студенческому билету):

a – это последняя цифра в “зачетке”,

b – это предпоследняя цифра в “зачетке”.

ОБРАЗЦЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ "МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ"

1) Производная и предел функции одной переменной

Задача 1. Найти производные функций

$$1. y = 7x^6 - 4x^3 + 2\sqrt{x} - 7$$

$$4. y = 5^{\sin x} \cdot e^{-x^2} + \cos^3(4x)$$

$$2. y = \frac{x^2 + 5}{3x - 1} + e^{-x} \cdot \cos 4x$$

$$5. y = (4x^3 + 2)^9 \cdot \operatorname{arctg}(8x^7)$$

$$3. y = 2^x \cdot \arcsin x - \ln(\operatorname{tg} 5x)$$

$$6. y = \frac{5^x + 7^x}{x^4 + 3} + \arcsin(\ln x).$$

Задача 2. Вычислить пределы:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 + 5}{7x^4 + 4x + 3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{21 + x} - 5}{\sin(x - 4)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{3x}}{x^2 + 5x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{\ln(x^2 - 3)}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +0} x^2 \ln x$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x \operatorname{arctg} 4x}$$

2) Производные высших порядков

1. Вычислить производную второго порядка:

$$y = e^{2^x}$$

2. Найти вторую производную функции заданную в неявном виде:

$$x^2 + y^2 = 1$$

3. Найти производную:

$$y = x^{x+1}$$

4. Найти первую и вторую производные функции заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$$

3) Дифференциальное исчисление функции многих переменных

1. Найти экстремум функции $y = x^3 - 4x^2$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на указанном отрезке

$$y = 2x^3 - 10x^2 - 16x, \quad [-4; 7].$$

3. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$z = x^4 + \sqrt{x^2 - y^2} + \ln y$$

4. Для данной функции найти $\operatorname{grad} z|_{M_0}$ и $\frac{\partial z}{\partial l}|_{M_0}$, где

$$z = \ln(x^2 + y^2), \quad M_0(-2; 1) \quad \vec{l} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$$

5. Найти экстремум функции $z = 4x^3 y^2 - 5x^3$

4) Неопределенный интеграл

1. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 5}};$
2. $\int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}};$
3. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{9 - \cos^2 x}};$
4. $\int \frac{2^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$
5. $\int x^2 \sin x dx;$
6. $\int \frac{\operatorname{arctg}(\ln x)}{x} dx;$
7. $\int (\sin x + \cos x)^2 dx;$
8. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1 - x^2}};$

5) Определенные интегралы, приложения определенных интегралов

1. Вычислить определенные интегралы.

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx \qquad 2) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{e^{\cos x}} dx$$

$$3) \int_1^2 x e^{-x} dx \qquad 4) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx$$

2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \ln x, \quad x = e \text{ и осью абсцисс}$$

3. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями:

$$1) y = x^2; y = 1; x = 2$$

$$2) xy = 1; x = 1; x = 4; y = 0$$

ОБРАЗЦЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ "МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ"

1. Найдите область определения функции $f(x) = \frac{\arcsin(x-1)}{\lg x}$:
Варианты ответов:
1) $x \in (0;1) \cup (1;2]$
2) $x \in (0;1) \cup (1;2)$
3) $x \in [0;1] \cup [2;3]$
4) $x \in (0;2) \cup (2;3)$
2. Если $a \in R$, то $\forall \varepsilon > 0$ ε - окрестностью $U(a, \varepsilon)$ числа a называется интервал
Варианты ответов:
1) $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$
2) $(a, a + \varepsilon)$
3) $(a - \varepsilon, a)$
4) $(-a, a)$
3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 - x + 6}{2x^3 + x^2 + 2x - 2}$ и указать его значение.
Варианты ответов:
1) $1/2$
2) 3
3) 2
4) ∞
4. Найти уравнения касательной и нормали к кривой $y = 5x^2 - 4x + 7$ в точке с абсциссой $x = -1$.
Варианты ответов:
1) $y_k = -14x + 2; y_n = \frac{x}{14} + \frac{225}{14}$
2) $y_k = 14x + 2; y_n = \frac{x}{14} - \frac{223}{14}$
3) $y_k = -15x + 2; y_n = -\frac{x}{15} + \frac{223}{15}$
4) $y_k = 15x + 2; y_n = -\frac{x}{15} + \frac{223}{15}$

5. Вычислить производную функции: $y = \arctg x + 4 \sin x - 5e^x \cdot x$

Варианты ответов:

1) $y' = \frac{1}{1+x^2} + 4 \cos x - 5e^x x - 5e^x$

2) $y' = -\frac{1}{1+x^2} - 4 \cos 8x + 5e^x$

3) $y' = \frac{1}{1+x^2} - 4 \cos 8x - e^x$

4) $y' = \frac{4}{1+x^2} \cos x - 5e^x x - 5e^x$

6. Найти y' , если $y = \cos^5 3x$.

Варианты ответов:

1) $y' = -15 \cos^4 3x \sin 3x$

2) $y' = -15 \sin^4 3x$

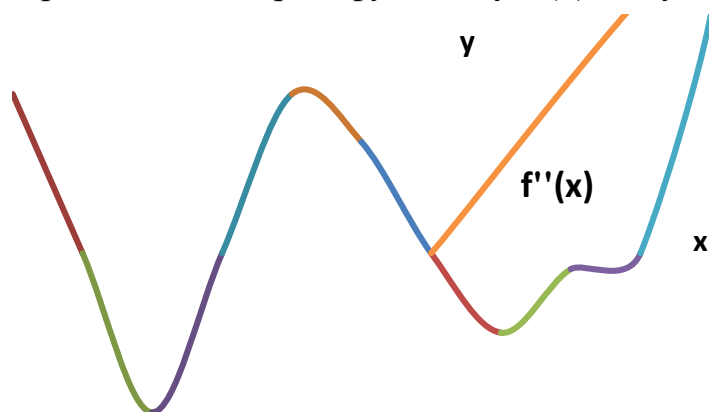
3) $y' = 5 \cos^4 2x \sin 2x$

4) $y' = -5 \cos^4 x \sin x$

5) $y' = -15 \sin^5 3x$

7. Функция $y=f(x)$ задана на отрезке $[-6;4]$

На рисунке изображен график второй производной данной функции. Найдите интервалы, на которых функция $y=f(x)$ выпукла вверх.



Варианты ответов:

1) $(-5;-3) \cup (0;3)$

2) $(-6;-2)$

3) $(-3;0) \cup (3;4)$

4) $(-4;-2) \cup (1;4)$

5) $(-3;0)$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Таблица производных

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $c' = 0$ | 2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \forall \alpha \in R$ | 3. $(a^x)' = a^x \ln a,$
$(e^x)' = e^x$ |
| 4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | 5. $(\sin x)' = \cos x$ | 6. $(\cos x)' = -\sin x$ |
| 7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ | 8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ | 9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | 11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ | 12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ |

Основные правила дифференцирования

- | | |
|---|---|
| I. $(u+v)' = u' + v'$ | II. $(cu)' = cu'$ |
| III. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ | IV. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ |
| V. Производная сложной функции $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ | |

Уравнение касательной: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Таблица эквивалентных функций:

При $x \rightarrow 0$ имеют место следующие эквивалентности:

$\sin x \sim x$	$\operatorname{arctg} x \sim x$
$\operatorname{tg} x \sim x$	$\ln(1+x) \sim x$
$\arcsin x \sim x$	$e^x - 1 \sim x$

При $x \rightarrow \infty$ каждый многочлен эквивалентен своему старшему члену:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \sim a_n x^n$$

Правило Лопиталю $\left(\frac{0}{0}\right); \left(\frac{\infty}{\infty}\right): \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$

Градиент функции $z = f(M)$ в точке M_0 : $\operatorname{grad} z \Big|_{M_0} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{M_0}; \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{M_0} \right)$

Формулы сокращенного умножения	Свойства степеней
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	$(ab)^m = a^m b^m$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	$(a^m)^n = a^{mn}$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$a^0 = 1$

Тригонометрические формулы, используемые при интегрировании

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$
$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\sin x \cdot \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$
$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$	$\sin x \cdot \cos y = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}$
$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$	$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$	$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$	$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin\left(x + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}\right)$

Приведем таблицу «основных» значений тригонометрических функций

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞
$\operatorname{ctg} x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞	0

Таблица неопределенных интегралов

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, (\alpha \neq -1)$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c,$	$\int dx = x + c,$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,$	$\int e^x dx = e^x + c,$	$\int \sin x dx = -\cos x + c,$
$\int \cos x dx = \sin x + c,$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c,$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c,$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c,$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c,$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c,$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c,$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + c,$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + c,$
$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + c,$	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + c,$	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + c.$

Метод подстановки $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \left. \begin{matrix} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x) dx = dt \end{matrix} \right| = \int f(t) dt = F(t) + c = F(\varphi(x)) + c.$

Метод интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du.$

Формула Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$

Площадь плоской фигуры $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$

Объем тела вращения $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$

Длина дуги плоской кривой $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$

Площадь поверхности тела вращения $S = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx.$

Объем выпуска продукции $U = \int_0^T f(t) dt.$